UNIVERSITÉ DE DOUALA

ECOLE DOCTORALE DE SCIENCES FONDAMENTALES ET APPLIQUEES
UNITE DE FORMATION DOCTORALE DE MATHEMATIQUE, INFORMATIQUE APPLIQUEE ET PHYSIQUE FONDAMENTALE
LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de la soutenance de Master II

Modélisation en finance mathématique :
Évaluation d'une option Européenne dans un modèle de marché financier Markovien

Présenté par : Victor Landry, NKOA NDZANA

Sous la direction de :
Pr. Louis-Aimé, FONO, Maître de Conférences, directeur de recherche
Dr. Romuald Hervé, MOMEYA, codirecteur de recherche

Résumé

Dans ce travail, nous évaluons le prix d'une option européenne écrite sur un actif dont la dynamique de prix présente des sauts consécutifs à l'évolution d'une chaîne de Markov X.
Plus précisément, nous considérons un modèle de marché Markovien à n états composé d'un actif non risqué localement dont le taux d'intérêt instantané dépend de X et d'un actif risqué dont les caractéristiques dépendent de X. Nous déterminons, dans ce contexte, le prix d'une option européenne écrite sur l'actif risqué par les deux méthodes suivantes : l'évaluation par replication et l'évaluation par une probabilité neutre au risque. Nous évaluons, par simulation Monte Carlo, le prix de l'option dans le cas particulier où le marché financier est réduit à deux états et nous analysons sa sensibilité en fonction des paramètres du modèle.

Abstract

In this dissertation, we evaluate the price of European option subscribed on one asset whose the pricing dynamic has jumps described by a Markov chain X.

More precisely, we consider a Markovian financial market model with n states ($n \geq 2$) containing one locally riskless asset and one risk asset whose the instantaneous interest rate and the characteristics respectively depends of X. We determine the European option price subscribed on risk asset by two different methods, namely, Evaluation by replication and Evaluation by a neutral risk probability.
In the case particular where the financial market has two states, we evaluate, by the Monte Carlo simulation method, the option price and we analyze its sensibilities based on some parameters of the model.

Table des matières

Liste des tableaux

Table des figures

Dédicaces

A mon père et à ma mère :

Christophe et Lidy, NDZANA.

Rémerciements

Rédiger un mémoire de recherche de Master II a constitué pour moi les premiers pas dans le monde de la recherche scientifique. Ceci n'aurait pas pu être possible sans l'aide et le soutien de plusieurs personnes dont l'occasion m'est donnée ici d'exprimer ma gratitude.

Je rends prémièrement grâce à DIEU, le père de mon Seigneur et Sauveur Jésus-Christ.

Je remercie le Professeur Louis-Aimé FONO, qui malgré ses multiples occupations a fait preuve d'une disponibilité extraordinaire pour l'avancement et l'achèvement de ce mémoire. Je tiens à exprimer toute ma gratitude au Dr Romuald MOMEYA qui m'a véritablement initié dans la recherche par ses conseils et son soutien sans relâche.

D'autre part, je voudrais remercier tous les enseignants du département de Mathématique et Informatique de la Faculté des Sciences ainsi que le Dr Georges Dieudonné MBONDO qui ont su me donner le goût des mathématiques et ses sciences économiques qui m'a permis de m'investir dans ce mémoire.

Je n'oublie pas mes camarades de Master II pour les moments chaleureux passés ensemble.

Introduction Générale

" Comment répartir plus efficacement ses ressources monétaires non destinées à la consommation d'aujourd'hui pour faire face au besoin de la consommation future ? " Cette question résume tout l'enjeu de la **Finance** dont les Bourses des valeurs mobilières constituent de nos jours la principale vitrine.

La dépendance de plus en plus forte de l'économie vis à vis de l'évolution des cours des produits échangés en ces lieux a abondamment nourri la curiosité et partant la nécessité de comprendre la dynamique en oeuvre derrière ces phénomènes. Pour saisir leur complexité, le langage mathématique offre à travers la modélisation une image simplifiée pouvant aider à leur compréhension.

La notion mathématique sur laquelle repose la modélisation des prix des instruments financiers est celle de processus stochastique. L'essor de la théorie financière moderne telle qu'elle fut développée à partir des résultats novateurs de Merton ([14]) et Black et Scholes s'est pour une large part réalisé grâce au développement de la théorie des processus stochastiques. Sur les trois dernières décennies, leur emploi s'est considérablement étendu pour décrire l'évolution des fluctuations des cours sur les marchés financiers dans un double objectif d'évaluation des actifs dérivés et de gestion des risques. A l'instar du mouvement Brownien géométrique pour les modèles de diffusion, les chaînes de Markov et les processus de Poisson constituent une famille idéale des processus permettant de modéliser les prix des actifs financiers dans les modèles à sauts.

Notre travail est centré sur le problème d'évaluation des options européennes (qui reste l'exemple le plus courant de la pertinence des méthodes de calcul stochastique en finance) écrites sur les sous-jacents qui s'échangent sur le marché, et de la gestion du risque liée à l'utilisation de ces produits financiers.

Ce travail s'articule autour de trois axes :

1. Dans le premier axe (chapitre 1), nous montrons la logique qui amène de la réalité économique au marché financier. Plus précisément, nous essayons ici de dire d'abord comment le marché financier s'insère dans la dynamique de développement de l'économie et comment les mathématiques peuvent permettre un meilleur fonctionnement de ces entités.
2. Le deuxième axe (chapitre 2) fait une brève incursion dans le calcul stochastique. Plus précisément, nous introduisons les objets mathématiques qui servent à décrire de façon simplifiée l'évolution du prix (ou cours) d'un actif boursier, ainsi que les concepts de base utiles pour la modélisation financière.
3. Enfin dans le dernier axe (chapitres 3 et 4) nous mettons en exergue certaines préoccupations réelles des acteurs d'un marché financier. Par exemple, comment détermine t-on le prix juste d'une option écrite sur un sous-jacent qui s'échange sur le marché ? Quelle est la sensibilité du prix obtenu lorsque le prix de l'actif risque, le prix d'exercice ou la volatilité du saut varie ? La démarche ici fera appel autant à l'explicitation théorique et aussi à la résolution numérique dans des cas particuliers simples.

Chapitre 1

La Place de la Finance dans l'Économie

1.1 De l'Économie à la Finance

L'expression *économie politique* apparaît pour la première fois en 1615 sous la plume d'Antoine Montchrestien au travers de son célèbre *Traité de l'économie politique*. A cette époque, l'économie politique est concernée par "l'administration du patrimoine", c'est- à-dire, la gestion des ressources humaines, naturelles et matérielles d'une communauté ou d'un pays eu égard au caractère éminemment rare de ces ressources. Mais le développement des connaissances et l'utilisation croissante des mathématiques vont entraîner la substitution du terme économie politique par *science économique*. Selon l'économiste et homme politique français Raymond Barre, cette dernière est "l'étude des formes que prend le comportement humain dans l'aménagement de ses ressources, l'analyse et l'explication des modalités selon lesquelles un individu, une société ou un pays affecte des moyens limités à la satisfaction des besoins nombreux et illimités". La science économique se divise généralement en deux grandes branches : la microéconomie et la macroéconomie.
La microéconomie étudie le comportement des agents économiques que sont

les ménages et les entreprises. Elle s'organise principalement autour de quatre questions ou théories que sont *la théorie du consommateur*, *la théorie du producteur*, *la théorie de l'optimum économique* et *la théorie de l'échange sur les marchés*.
La macroéconomie quant à elle, a pour objet d'étude l'économie dans son ensemble. Elle cherche à expliquer les grands agrégats (indicateurs) économiques et leurs interactions. Ces agrégats comprennent le revenu national, la production, le chômage, le niveau général des prix, la consommation totale, etc. L'objectif principal de la macroéconomie est d'étudier les politiques économiques particulièrement la politique monétaire. Cette dernière est consacrée aux questions monétaires.

La monnaie dans son acception courante est un moyen de paiement accepté par tous au sein d'un espace géographique donné, directement utilisable pour effectuer des règlements (achats, dettes). L'utilisation et la circulation de ce moyen de paiement renvoient à la question de financement de l'économie qui tient dès lors une place centrale dans le corpus économique.

1.2 De la Finance à la Finance mathématique

La finance désigne la manière dont sont allouées au fil du temps les ressources monétaires disponibles en quantité limitée. En d'autres termes, elle est l'étude de l'optimisation du risque (de perte) et de la rentabilité (ou coût) avec deux contraintes : tenir compte du temps et mesurer l'incertitude. D'une part, elle intègre les méthodes, les institutions qui permettent aux particuliers d'obtenir des capitaux nécessaires et aux épargnants de placer leurs capitaux. D'autre part, les instruments de transfert d'anticipations de revenus et de risques dont les prix pouvant être négociés sur des marchés au moyen d'institutions ; ce qui fait appel à la notion de finance de marché. Le tableau synoptique de l'Annexe 1 permettra d'en saisir les traits essentiels.

La finance de marché est l'étude du fonctionnement des grands marchés sur lesquels il est possible d'investir, se couvrir du risque lié à la fluctuation des prix en utilisant les instruments financiers. Ces marchés sont connus sous le nom de marchés financiers. Au sens large, la notion de marché financier est souvent synonyme de bourse. Au sens strict, la bourse n'est qu'un compartiment de ces marchés. En réalité, les marchés financiers sont un regroupement d'un ensemble d'institutions mettant en jeu des instruments et mécanismes par lesquels les agents disposant des capacités de financement vont couvrir les besoins de financement d'autres agents.

Suite à la grande vague des dérégulations intervenues dans les années 70-80 aux États-Unis d'abord et qui se sont poursuivies en Europe et dans le monde suivant le mode de la globalisation/mondialisation, la sphère financière a pris définitivement le pas sur la sphère réelle de l'économie. Ceci s'est particulièrement accentué au cours des deux dernières décennies avec l'utilisation intensive des mathématiques, ce qui a contribué à éloigner le monde financier de la réalité économique.
Mais avant de discuter de la modélisation financière, objet du présent travail nous présentons succinctement dans la suite des mécanismes et enjeux à l'origine de la finance de marché.

1.2.1 Raison d'être des marchés financiers

Traditionnellement, pour financer l'économie et réaliser de projets l'État et les firmes se tournaient vers les banques. Celles-ci créaient donc de la monnaie qu'elles mettaient à leur disposition sous certaines conditions. Cette monnaie créée devait être en rapport avec les dépôts reçus. En particulier, chaque banque possède un compte au niveau de la banque centrale et la banque centrale prélève donc un taux d'intérêt appelé taux directeur du crédit. Par ce fait la banque centrale rend plus ou moins facile le refinancement

en influant sur le taux. Le mode de financement par la création monétaire connaît certaines limites à l'instar de la déflation et de l'inflation qui peuvent avoir des conséquences néfastes sur la croissance ou l'emploi. Ainsi donc, l'enjeu du contrôle du niveau de l'inflation est majeur dans les économies développées.
Par ailleurs, les pays en voie de développement ayant besoin de grandes ressources financières pour mener à bien leurs projets se tournaient habituellement vers les institutions de Bretton Woods (Banque Mondiale, Fond Monétaire International) pour obtenir des prêts à des taux concessionnels mais avec des conditionnalités souvent drastiques. Ce qui a conduit pluieurs d'entre eux à chercher des moyens alternatifs pour lever de fonds nécessaires à leurs projets.

A la suite des contraintes relevées précédemment, les pays développés (et dans une moindre mesure les pays en voie de développement) ont mis en place des institutions qui ont fondamentalement changé le paysage financier. Il s'agit de la *Bourse des valeurs.*

1.2.2 Présentation générale des marchés financiers

Il existe différents marchés financiers. Chaque marché est spécifié par le type d'outils faisant l'objet des transactions. Ainsi, nous pouvons citer :
i) le *marché obligataire* où se réalisent les émissions des titres à revenu fixe. Ici, l'offre des capitaux est principalement assurée par les ménages et les investisseurs institutionnels (compagnies d'assurances par exemple) ;
ii) le *marché des actions* où se réalisent les émissions des actifs a revenu variable ;
iii) le *marché des produits dérivés* qui permet la couverture des risques en rendant disponible des produits financiers dont la réglementation est fixée avant une certaine échéance.
En dehors de ces marchés on distingue aussi les marchés à terme de matières

premières et le marché des taux qui comme leurs noms l'indiquent s'occupent respectivement des transactions sur les matières premières et les taux d'intérêt.

Nous pouvons aussi dissocier les marchés financiers en compartiments :
le *marché primaire* encore appelé marché de l'émission est le lieu où des produits financiers sont émis pour la toute première fois par un Etat pour financer son déficit budgétaire ou par des entreprises pour lever des fonds destinés au financement de leurs projets ;
le *marché secondaire* est destiné à la vente et au rachat des actifs financiers qui existent déjà. Il permet notamment aux investisseurs de vendre les titres qu'ils détiennent et d'acheter les titres qu'ils souhaitent acquérir. On l'appelle généralement marché de la négociation des titres.

1.3 Acteurs et Outils des marchés financiers

Le fonctionnement de tout marché dépend des biens que certains agents y acquièrent en contrepartie des liquidités. Les marchés financiers ne dérogent pas à cette règle. Ainsi, les agents [1] économiques ou les investisseurs à besoin de financement mettent à la disposition des agents [2] à capacité de financement des biens de marché (produits financiers) qui représentent pour ces derniers la garantie d'un paiement futur et en contrepartie, ces agents leur versent des liquidités.
Initialement, sur les marchés financiers les produits proposés sont appelés *titres de base* dont la valeur va être une fonction de certains paramètres (valeur de la firme émettrice, cote de crédit, taux de change, taux d'intérêt, etc.). Ces titres sont pour la plupart émis soit sous forme *propriétaires (actions)* accordant ainsi une partie du capital social à celui qui les acquiert ou sous

1. par exemple, les entreprises, les administrations publiques, collectivités territoriales décentralisées, etc.
2. ménages,institutions financières, investisseurs institutionnels, etc.

forme *emprunts (obligations)* à payer à une date prédéfinie à l'avance.
La variabilité des paramètres sus-évoqués est de nature aléatoire incitant donc les agents à capacité de financement qui sont averse au risque à solliciter un transfert de risque (incertitude liée à l'aléa). C'est ainsi que les banques vont créer un nouveau type de produits appelés *produits dérivés*.
Les produits dérivés sont des instruments financiers dont la valeur dépend de celle d'un titre de base. Ils permettent principalement aux acteurs du marché risquophobes de se couvrir ou de réduire le risque lié à la variabilité de la valeur du titre de base. On peut en effet citer : les options, les contrats à terme, les swaps, les forwards, etc.

1.4 Les Mathématiques dans les marchés financiers

Les produits dérivés jouent sur les marchés financiers le rôle d'une police d'assurance par le fait qu'ils permettent aux agents à capacité de financement de se couvrir ou de minimiser certains aléas. Toutefois, la partie qui vend ces produits porte désormais le risque des tiers et doit faire face à un certain nombre de problèmes formulés dans les questions suivantes :

★ Quel est le prix équitable d'un produit dérivé, c'est-à-dire, la prime du contrat à payer par l'acheteur (ou auquel le vendeur est susceptible d'accéder à la transaction) d'un produit dérivé. C'est le problème du pricing ou de l'évaluation/valorisation.

★ Comment le détenteur de l'actif sous-jacent doit gérer la prime au cours du temps pour disposer d'une somme suffisante au cas où le détenteur du contrat décide d'exercer son produit dérivé ? C'est le problème de la couverture. La finance mathématique s'est développée autour de ces questions fondamentales.

Pour conclure sur ce chapitre, nous pouvons dire que loin d'être une entité économique abstraite et souvent présentée comme irrationnelle (à cause du caractère spéculatif de certains agents de ce marché), les marchés financiers se sont imposés comme une réalité de plus en plus prégnante de la structure économique. La nature incertaine de ces marchés va amener ses acteurs à se tourner vers les outils mathématiques de plus en plus complexes mais dont l'efficacité ne peut-être véritablement remise en cause.

Chapitre 2

Préliminaires

Ce chapitre rassemble l'essentiel des notions de base nécessaires pour une bonne compréhension de la suite de ce travail. Ces préliminaires sont de deux natures. L'une mathématique dans laquelle l'on rappelle l'essentiel des éléments de la théorie des probabilités et des processus stochastiques, outils de base pour modéliser la réalité boursière. L'autre tire sa source dans la finance mathématique et présente le vocabulaire et les principaux enjeux de ce champ qui modélise la façon dont l'humain gère ses ressources non destinées à la consommation d'aujourd'hui.

2.1 Préliminaires mathématiques

2.1.1 Éléments de la théorie des probabilités

Dans cette Sous-section, nous fournissons un cadre formel qui décrit les phénomènes aléatoires (phénomènes dont la réalisation n'est pas connue à l'avance) et qui est basé sur 4 quatre notions fondamentales : l'univers, les événements, la tribu et la mesure de probabilité.

Univers, tribu, probabilité et variable aléatoire

Définition 2.1.1
1. *L'univers ou espace fondamental est noté* Ω *et désigne l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire.*
2. *Un évènement aléatoire est tout sous-ensemble* A *de* Ω.

On dit qu'un événement est aléatoire si une fois l'expérience effectuée, on peut dire si cet événement a été réalisé ou non. Suivant l'expérience considérée, l'élément $\omega \in \Omega$ est appelé *état du monde*, point aléatoire ou trajectoire. L'univers peut être dénombrable ou indénombrable.

Exemple 2.1.2

1. *Expérience aléatoire : lancer deux fois de suite d'une pièce de monnaie.*

$$\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}.$$

2. *Expérience aléatoire : trajectoire du centre de gravité* G *d'un solide en mouvement durant la période temps* $t \in \mathbb{T}$. *Ici, l'univers* $\Omega = (\mathbb{R}^3)^{\mathbb{T}}$ *est l'ensemble des trajectoires ayant pour espace de phase l'espace* $\mathbb{R}^3$.

Dans la suite, $\mathcal{F}$ un sous-ensemble des parties de Ω.

Définition 2.1.3

1. $\mathcal{F}$ *est une algèbre sur* Ω *si les conditions suivantes sont satisfaites :* *(i)* $\Omega \in \mathcal{F}$ *(ii)* $A \in \mathcal{F}$ *alors* $A^c \in \mathcal{F}$ *et (iii)* $A, B \in \mathcal{F}$ *alors* $A \cup B \in \mathcal{F}$.
2. *Soit* $\mathcal{F}$ *une algèbre sur* Ω. $\mathcal{F}$ *est une tribu si pour toute famille* $(A_i)_{i \in I}$ *d'éléments de* $\mathcal{F}$, $\cup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{F}$.
3. *Une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ *sur* $(\Omega, \mathcal{F})$ *est une famille croissante de sous-tribus de* Ω, *c'est à dire,* $\forall\ 0 < s \leq t$, *nous avons* $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.

Exemple 2.1.4
$\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω appelée algèbre triviale et $\{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu sur Ω appelée algèbre grossière.

En général, il n'est pas facile de décrire tous les éléments d'une tribu, on préfère alors les décrire par leurs générateurs.

Définition 2.1.5 *Soit C un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$. La tribu engendrée par C, notée $\sigma(C)$, est la plus petite tribu contenant C.*

$\sigma(C)$ coincide avec l'intersection de toutes les tribus contenant C.

Étant en possession d'une tribu d'événements $\mathcal{F}$, il est loisible de vouloir attribuer à chacun des événements une probabilité qui représente le degré de confiance que l'on a en sa réalisation.

Définition 2.1.6

1. *Une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est une application $\mathbb{P} : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1]$ qui vérifie les conditions suivantes :*
   - *Si A est un sous-ensemble de Ω alors $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$*
   - $\mathbb{P}(\Omega)$=*1*
   - *Pour toute famille d'événements $(A_i)_{i\in I}$ deux à deux disjoints*

   $$\mathbb{P}(\cup_{i\in I} A_i) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i).$$

2. *La probabilité conditionnelle de l'événement A sachant l'événement B tel que $\mathbb{P}(B) > 0$ est le réel défini par*

   $$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

3. *Soient A et B deux événements. Ils sont dit indépendants lorsque*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

4. *Une famille finie d'événements $A_1, A_2, \cdots, A_n$ est dite indépendante si $\forall 1 \leq k \leq n$ $\forall \{i_1, \cdots, i_n\} \subset \{1, \cdots, n\}$, $A_{i_1}, A_{i_2} \cdots, A_{i_k}$ sont deux à deux disjoints, alors*

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1})...\mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Proposition 2.1.7 *Probabilités totales et formule de Bayes*

1. *Soit $B_1, \cdots, B_n$ une suite d'événements formant une partition de Ω (B_i sont deux à deux disjoints et $\Omega = \cup_{i=1}^{n} B_i$) et tel que $\mathbb{P}(B_i) > 0$. Alors nous avons la formule des probabilités totales $\forall A \in \mathcal{F}$*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i).$$

2. *Si de plus $\mathbb{P}(A) > 0$, nous déduisons la formule de Bayes*

$$\mathbb{P}(B_j|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}.$$

Définition 2.1.8
Soient $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ deux probabilités définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F})$.

1. *$\mathbb{Q}$ est absolûment continue par rapport à $\mathbb{P}$ si*

$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad \mathbb{P}(A) = 0 \Longrightarrow \mathbb{Q}(A) = 0. \tag{2.1.1}$$

2. *$\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ sont équivalents ($\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$) si*

$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad \mathbb{Q}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(A) = 0. \tag{2.1.2}$$

Après avoir défini la structure mathématique de base de la théorie des probabilités : *espace probabilisé*, c'est-à-dire, le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, nous allons utiliser la notion de *variable aléatoire* (v.a) pour une analyse approfondie et simplifiée des expériences aléatoires.
Soit $X : \Omega \longrightarrow E$, B est une partie de E et $\mathcal{B}$ est une famille de parties de E. Alors nous noterons par $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in B\}$ et $X^{-1}(\mathcal{B}) = \{X^{-1}(B), B \in \mathcal{B}\}$.

Définition 2.1.9

1. *Une application $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (Y, \mathcal{B})$ est dite mesurable si pour tout $B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.*
2. *Soient $(Y, \mathcal{B})$ un espace mesurable et $X : \Omega \longrightarrow E$. La tribu engendrée par X (sur Ω) est la plus petite tribu notée $\sigma(X)$ qui rend X mesurable et définie par*

$$\sigma(X) = \{X^{-1}(B), B \in \mathcal{B}\} = X^{-1}(\mathcal{B}). \tag{2.1.3}$$

Définition 2.1.10 *Une variable aléatoire à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$ est toute application mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(E, \mathcal{E})$.*

Remarque 2.1.1 *-Si E est dénombrable et $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$, on parle de v.a discrète.*
-Si $E = \mathbb{R}$ et $\mathcal{E} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des boréliens réels on parle de v.a réelle.

Définition 2.1.11 *Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et à valeurs dans un espace fini E.*
X est mesurable par rapport à $\mathcal{F}$, ou adaptée à $\mathcal{F}$, et on note $X \in \mathcal{F}$, si pour tout $A \subset E$, $X^{-1}(A) \subset \mathcal{F}$.

La variable aléatoire est alors dite $\mathcal{F}$-mesurable. La plus petite tribu qui fait en sorte que X soit $\mathcal{F}$-mesurable est $\mathcal{F} = \sigma(X)$.

Définition 2.1.12 *Soit* $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. *La loi de* X *est la mesure de probabilité* $\mathbb{P}_X$ *mesure image sur* $\mathbb{R}$ *de* $\mathbb{P}$ *par* X *définie pour tout* $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ *par :*

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in A\}).$$

2. *La fonction de repartition de* X *est l'application définie de* $\mathbb{R}$ *vers* $[0, 1]$ *par*

$$\forall x \in \mathbb{R} \; F(x) = \mathbb{P}_X(]-\infty, x[) = \mathbb{P}(X < x).$$

Théorème 2.1.13
Une fonction réelle f *définie sur* $\mathbb{R}$ *est une densité de probabilité d'une variable aléatoire* X *si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées*
- f *est continue sur* $\mathbb{R}$ *sauf éventuellement un nombre fini de points.*
- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Si f est la densité de X et F la fonction de repartition, alors $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Définition 2.1.14
Soit X *une variable aléatoire sur* Ω *prenant des valeurs réelles positives ou étant intégrable. L'espérance (valeur moyenne) de* X *est le nombre (quantité)*

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\omega) \quad (cas \quad discret)$$

$$E(X) = \int_{\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) \quad (cas \quad continu).$$

Conditionnement d'une variable par rapport à une information

L'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire X sachant une information est la valeur moyenne attendue pour X lorsque nous connaissons cette information. Plus formellement,

Définition 2.1.15

1. *(Par rapport à un événement) Soit X une variable aléatoire définie sur Ω et prenant les valeurs sur $\mathcal{X}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. L'espérance de X sachant l'événement B tel que $\mathbb{P}(B) > 0$ est le réel défini par*

$$E(X|B) = \sum_{x \in \mathcal{X}} x \ \mathbb{P}(X = x|B) = \frac{E(X\mathbb{I}_B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

2. *(Par rapport à une variable aléatoire) Soit X une variable aléatoire intégrable et $Y = \sum_i^n y_i \mathbb{I}_{B_i}$ une variable aléatoire simple à valeurs dans $\{y_i; 1 \leq i \leq n\} \subset \mathbb{R}$. L'espérance de X sachant Y est une v.a $\sigma(Y)-$mesurable définie pour $\mathbb{P}(B_i) > 0$ par*

$$E(X|Y) := \sum_i^n \frac{E(X\mathbb{I}_{B_i})}{\mathbb{P}(B_i)} \mathbb{I}_{B_i}(\omega).$$

Remarque 2.1.2 *(Par rapport à une sous-tribu de $\mathcal{F}$) Soit X une v.a définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ qui est positive ou intégrable. Alors, on montre grâce au théorème de Radon-Nikodym que pour toute sous-tribu $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ correspond une v.a $X_{\mathcal{G}}$ positive ou intégrable selon le cas, qui est $\mathcal{F}-$mesurable, unique à un ensemble de mesure nulle près et telle que*

$$E(X_{\mathcal{G}}\mathbb{I}_B) = E(X\mathbb{I}_B), \forall B \in \mathcal{F}.$$

La v.a $X_{\mathcal{G}}$ est appelée espérance conditionnelle de X par rapport à la sous-tribu $\mathcal{G}$ et est notée $E(X|\mathcal{G})$.

Les propriétés de $E(X|\mathcal{G})$ sont :

1. $E(E(X|\mathcal{G})) = E(X)$ lorsque X est intégrable, i.e., $E(|X|) < \infty$.

2. Si X est $\mathcal{G}$-mesurable, alors $E(X|\mathcal{G}) = X$.

3. Si X est indépendante de la tribu $\mathcal{A}$, alors $E(X|\mathcal{A}) = E(X)$.

4. Si $a, b \in \mathbb{R}$, alors $E(aX + bY|\mathcal{G}) = aE(X|\mathcal{G}) + bE(Y|\mathcal{G})$.

5. Si Y est $\mathcal{G}$-mesurable, alors $E(YX|\mathcal{G}) = YE(X)$.

6. Si $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont deux sous-tribus de $\mathcal{F}$ tels que $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$, alors

$$E(E(X|\mathcal{A}_2)|\mathcal{A}_1) = E(E(X|\mathcal{A}_1)|\mathcal{A}_2) = E(X|\mathcal{A}_1).$$

2.1.2 Élements de statistiques : Estimation

Généralités

Nous considérons une caractéristique θ d'une population P. Par exemple θ est la moyenne d'une variable X qui concerne les individus de P. Pour connaître la valeur exacte de θ, il faudrait étudier tous les individus de P en effectuant un recensement ou une élection. Si nous n'avons pas la possibilité d'étudier tous les individus de P (faute de temps ou d'argent ou P est infinie), nous nous contentons de déterminer, à partir d'un échantillon de taille n extrait de façon aléatoire de P, une valeur approchée de θ ou mieux un encadrement de θ : (intervalle de confiance de θ).

Intervalle de confiance

La notion d'intervalle de confiance apparaît lorsqu'on tente d'obtenir des informations synthétiques sur une population que l'on ne connaît pas entièrement. On travaille sur un échantillon et l'on souhaite connaître la fiabilité que l'on peut accorder aux valeurs observées par rapport aux valeurs réelles de la population totale. Plus précisément, l'intervalle de confiance (IC) avec une probabilité p est un intervalle de valeurs qui a la probabilité p de chance de contenir la vraie valeur du paramètre estimé. Par exemple, avec une population mère de plus de 500 personnes, nous pouvons calculer à partir d'un échantillon de 30 personnes la moyenne d'âge qui est de 25 ans. La moyenne d'âge de l'ensemble des personnes diffère probablement de cette moyenne observée. Il y'a une marge d'erreur que nous pouvons estimer avec le calcul de l'intervalle de confiance (avec 5 pour cent de risque d'erreur ou 95 pour cent de certitude ou de confiance).

Construction de l'intervalle de confiance

Soit X une variable aléatoire définie sur P dont nous voulons estimer la moyenne m de X. Pour le faire, puisque P a une taille infinie, nous allons extraire de X un échantillon $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) de carrée intégrables dont la moyenne et la variance sont données respectivement par :

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \tag{2.1.4}$$

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 \tag{2.1.5}$$

Enonçons dans ce qui suit le Théorème et le Corollaire suivants.

Théorème 2.1.16 *(Théorème centrale limite) Soit* $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) de carrée intégrables (de même loi que* X*) d'esperance* $m = E[X_1]$ *et de variance* $\sigma^2 = var(X_1)$*. Alors la suite* $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X}_n - m)$ *converge en loi vers une variable* N *de loi gaussienne centrée réduite* $\mathcal{N}(0,1)$*.*

Corollaire 2.1.17 *Soit* $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) de carrée intégrables et de même loi que* X *tel que* $E(X) = m$ *et* $Var(X) = \sigma^2$*. Alors pour toute fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue bornée (resp continue sauf en un nombre fini de points), si* N *désigne une variable gaussienne* $\mathcal{N}(0,1)$*, alors*

$$\lim_{n\mapsto+\infty} E\Big[f\Big(\frac{\sqrt{n}}{\sigma_n}(\overline{X}_n - m)\Big)\Big] = E\Big(f(N)\Big) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx \qquad (2.1.6)$$

De plus, pour tout couple de nombre réels (a,b) *tels que* $a \leq b$*, on a*

$$\lim_{n\mapsto+\infty} P\Big(\frac{\sigma_n}{\sqrt{n}}a \leq \overline{X}_n - m \leq \frac{\sigma_n}{\sqrt{n}}b\Big) = \int_a^b f(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx. \qquad (2.1.7)$$

De l'égalité $P\Big(\mid N \mid\leq t_\alpha\Big) = 1-\alpha$, nous déduisons que pour n assez grand $P\Big(\mid \overline{X}_n - m \mid\leq t_\alpha\frac{\sigma_n}{\sqrt{n}}\Big) \sim 1-\alpha$, c'est à dire, l'intervalle de confiance de $E[X_1]$ à $1-\alpha$ *pourcent* est

$$\Big[\overline{X}_n - t_\alpha\frac{\sigma_n}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + t_\alpha\frac{\sigma_n}{\sqrt{n}}\Big] \qquad (2.1.8)$$

2.1.3 Élements de la théorie des processus stochastiques

Dans cette sous-section, nous considérons $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et E un ensemble non vide.

Définition et premières propriétés

Définition 2.1.18 *Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires* $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ *définies sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *à valeurs dans* E.

$\mathbb{T}$ (resp. E) est appelé espace de temps (resp. espace d'états) du processus X.
Lorsque $\mathbb{T} = \mathbb{N}$, X est appelé *suite aléatoire* ou *processus en temps discret.*
Lorsque $\mathbb{T}$ est un intervalle de $\mathbb{R}^+$, alors X est *une fonction aléatoire* ou *processus en temps continu.*
Un processus stochastique permet de faire une representation simplifiée de l'état d'un système évoluant avec incertitude au cours du temps. L'observation peut se faire de façon discrète ou continue, et à la date t elle est représentée par la variable aléatoire X_t.

Le tableau suivant présente quelques exemples de processus usuels selon leur espace de temps et leur espace d'état :

Processus	**Espace de temps**	**Espace d'état**
Chaîne de Markov	discret ou continu	discret
Mouvement Brownien	continu	continu
Processus de Poisson	continu	discret

Définition 2.1.19

1. *Soit* $\omega \in \Omega$. *Une* trajectoire ou réalisation *du processus* $(X_t)_{t \geq 0}$ *associée à* ω *est une fonction définie de* $\mathbb{T}$ *vers* E *par* $t \mapsto X_t(w)$.
2. *La loi d'un processus est une probabilité sur l'ensemble* $E^{\mathbb{T}}$ *des fonctions-trajectoires du processus.*
3. *Soit* $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ *un processus stochastique à temps continu.*
   • *Les accroissements de ce processus sont les variables aléatoires* $X_t - X_s$ *pour tout* $0 \leq s \leq t < +\infty$.
   •$(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ *est dit à accroissements indépendants lorsque pour tout entier*

n et $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n < +\infty$, les variables $X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont mutuellement indépendantes.
$\bullet (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *est dit à accroissements stationnaires lorsque pour tout $h, t \in \mathbb{T}$ la loi de l'accroissement $X_{t+h} - X_t$ ne dépend pas de t, c'est à dire,*

$$loi(X_{t+h} - X_t) = loi(X_h - X_0).$$

Pour représenter les informations contenues dans un processus au fil du temps on se sert de la notion de *filtration* qui est une famille croissante de sous-tribus d'une tribu-mère modélisant la structure globale du hasard.

Définition 2.1.20 *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable.*

1. *Une filtration d'un processus X est la famille croissante de tribus $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ definie par $\forall t \in \mathbb{R}^+$ $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$.*
2. $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P})$ *est un* espace de probabilité filtré.

La tribu $\mathcal{F}_t$ représente l'information contenue dans le processus X entre 0 et t et est engendrée par les variables aléatoires X_s où $s \in [0, t]$.

Définition 2.1.21 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P})$ est un* espace probabilisé filtré.

1. *Un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est dit adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ si pour tout $t \in \mathbb{T}$ X_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable.*

2. *Un temps d'arrêt est une variable aléatoire τ à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.*
3. *Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est dit à trajectoires **càdlàg** i.e. continues à droite et limitées à gauche (resp. **càglàd** i.e continues à gauche et limitées à droite) si ses trajectoires sont continues à droite et pourvues de limites à gauche (resp. continues à gauche et pourvues de limites à droite).*

4. *La tribu sur $\Omega \times \mathbb{T}$ générée par tous les processus adaptés à trajectoires càg et notée*

$$\mathcal{P} := \sigma\{Y : \Omega \times \mathbb{T} \to \mathbb{R} | Y \textbf{ est à trajectoires càg}\}$$

*est appelée **tribu prévisible**.*

5. *La tribu sur $\Omega \times \mathbb{T}$ générée par tous les processus adaptés à trajectoires **càdlàg** est appelée **tribu optionelle** et est notée $\mathcal{O}$.*

6. *Un processus est dit **prévisible** ou **optionelle** s'il est mesurable par rapport à $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{O}$, respectivement.*

La notion de processus prévisible est particulièrement importante lorsqu'il faudra définir l'intégrale stochastique et nous y reviendrons plus loin. Un exemple classique de processus à trajectoires **càdlàg** est la chaîne de Markov à temps continu que nous introduisons dans la suite.

Chaîne de Markov

Définition 2.1.22 1. *Une chaîne de Markov à temps continu est un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ satisfaisant les conditions suivantes :*
- *le processus est à temps continu ;*
- *l'espace E est fini ou dénombrable ;*
- *le processus satisfait la propriété de Markov, c'est à dire pour tout $t, s \geq 0$ et tout état $i, j \in E$, on a*

$$\mathbb{P}(X_{t+s} = j | X_s = i, X_u = x_u \in E, 0 \leq u \leq s) = \mathbb{P}(X_{t+s} = j | X_s = i).$$

2. *Ce processus est dit homogène si*

$$\mathbb{P}(X_{t+s} = j | X_s = i) = \mathbb{P}(X_t = j | X_0 = i).$$

Dans la suite, nous ne considérerons que les chaînes de Markov homogènes et nous noterons pour tout $t \in \mathbb{T}$, $P_{ij}(t) = \mathbb{P}(X_t = j | X_0 = i)$ leurs probabilités de transition, c'est à dire, le degré de confiance avec lequel la chaîne de Markov passe de l'état i à j à l'instant t. Ainsi elles vont vérifier $P_{ij}(t) \geq 0$ pour tout $i, j \in E$ et $\sum_{j \in E} P_{ij}(t) = 1$. $P(t) = (P_{ij}(t))$ sera appelé la matrice de transition au temps t.

Définition 2.1.23 *Soit N un entier strictement positif. Une matrice de transition de taille N est une matrice $(P) = (\mathbb{P}_{ij})_{1 \leq i,j \leq N}$ satisfaisant les deux conditions suivantes : $\forall i, j \ 0 \leq \mathbb{P}_{ij} \leq 1$ et $\sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}_{ij} = 1$.*

Les chaînes de Markov à temps continu vérifient l'équation de Chapman-Kolmogorov. C'est l'essence du théorème suivant :

Théorème 2.1.24 *Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ une chaîne de Markov en temps continu de matrice de transition $P(t)$ alors $\forall \ t, u \geq 0, P(t+u) = P(t)P(u)$, c'est à dire,*

$$\forall \ i, j \in E, P_{ij}(t+u) = \sum_{k \in E} P_{ik}(t) P_{kj}(u).$$

En utilisant une chaîne de Markov en temps continu $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ pour décrire un phénomène, on observe de façon momentanée dans le temps et $P = P(1)$ ne permet pas de déterminer $P(t)$ pour tout t.
Nous considérons $P(h)$ lorsque h tend vers 0, grâce à

$$P(h+t) = P(h)P(t) = P(t)P(h) \tag{2.1.9}$$

et sachant que la matrice à l'instant initial est $P(0) = I$ nous avons

$$\frac{P(h+t) - P(t)}{h} = P(t)\frac{P(h) - I}{h} = \frac{P(h) - I}{h} P(t) \tag{2.1.10}$$

en passant à la limite

$$Q := \lim_{h \longrightarrow 0^>} \frac{P(h) - I}{h} = P'(0) \tag{2.1.11}$$

on a

$$P'(t) = P(t)Q \quad \text{(équation du passé)} \tag{2.1.12}$$

$$P'(t) = QP(t) \quad \text{(équation du futur)} \tag{2.1.13}$$

cette équation admet une unique solution qui est

$$P(t) = e^{tQ} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n Q^n}{n!} \tag{2.1.14}$$

la matrice Q est appelé *générateur infinitesimal* de $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$.

Définition 2.1.25 *Soit Q une matrice carrée d'ordre cardinal de E. Q est un générateur infinitésimal définit sur l'espace d'état E si elle vérifie les conditions suivantes :*$\forall i, j \in E$
$\bullet q_{ii} \in]-\infty; 0]$
$\bullet \sum_{j \in E} q_{ij} = 0$
$\bullet j \neq i \quad q_{ij} \geq 0$

En effet, si nous désignons par :

$$P_t^{ij} = \mathbb{P}[X_{t+s} = j | X_s = i] \quad \forall i, j \in E$$

les probabilités de transitions de X de l'état i à l'état j à l'instant t, comme X est supposée homogène elles dépendent seulement de la longueur de la période de transition, ce qui implique l'existence et la constance des intensités :

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{\mathbb{P}_t^{ij}}{t} = q_{ij}, \quad i \neq j$$

q_{ij} désigne la vitesse instantanée de passage de l'état i à l'état j.
La figure qui suit présente la trajectoire d'une chaîne de Markov ayant deux états.

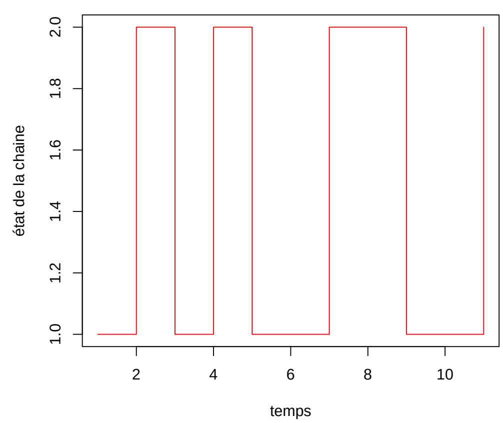

FIGURE 2.1 – Chaine de Markov

Un autre exemple de processus à trajectoires **càdlàg** est le processus de comptage. C'est un processus très utilisé dans la modélisation, notamment pour dénombrer les phénomènes aléatoires tels les appels dans une centrale téléphonique, le nombre de sauts dans l'évolution du cours d'un actif financier. Pour étudier ce processus, nous introduisons d'abord la notion de processus ponctuels.
De façon générale, on considère un événement répétitif et on note (on pointe) les instants successifs auxquels il se produit. Soit la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des instants successifs ou la suite de V.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ ou le processus stochastique

à temps discret.

Processus de comptage

Définition 2.1.26 *Le processus* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est un processus ponctuel s'il vérifie :*
$\bullet T_0 = 0$
$\bullet T_0 < T_1 < T_2....$ *la suite est strictement croissante ce qui suppose que deux événements n'arrivent pas au même instant ;*
$\bullet T_n$ *tend vers* ∞ *quand* n *tend vers* ∞*, ce qui suppose qu'il n'y a pas d'accumulation vers un point particulier de l'espace des temps.*

A ce processus on associe un processus dit de *comptage*, qui à chaque instant, donne le nombre N_t d'événements (rares) qui se sont produits dans l'intervalle de temps $(0, t]$.

Définition 2.1.27 *Soit* $(N_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *un processus stochastique à valeurs réelles, il est dit de comptage si pour* $\mathbb{P}-$*presque tout* $\omega \in \Omega$ *la trajectoire* $t \longmapsto N_t(\omega)$ *est croissante par sauts d'amplitude 1, continue à droite et tel que* $N_0(\omega) = 0$.

Un processus de ce type à une fonction en escalier, l'événement survient à $t_1, t_2..$ à chacun de ces instants, le nombre $N(t)$ augmente de 1.

2.1.4 Éléments de Calcul Stochastique

Martingale

Dans le suite de ce travail, nous supposons que $\mathbb{T}$ l'espace de temps est continu.

Définition 2.1.28

1. *Un processus stochastique* $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *est une martingale ou* $\mathcal{F}$*-martingale lorsqu'il vérifie :*

(a) $\forall t \in \mathbb{T}$ X_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable ou adapté ;*

(b) $\forall t \in \mathbb{T}$ $E|X_t| < +\infty$ *;*

(c) $\forall\ s, t \in \mathbb{T}$ $s \leq t$ *nous avons* $E(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$.

2. $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *est une sur-martingale si en plus de vérifier les deux premières propriétés, nous avons* $\forall\ s, t \in \mathbb{T}$ $s \leq t$, $E(X_t|\mathcal{F}_s) \leq X_s$

3. $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *est une sous-martingale si en plus de vérifier les deux premières propriétés, nous avons* $\forall\ s, t \in \mathbb{T}$ $s \leq t$, $E(X_t|\mathcal{F}_s) \geq X_s$

Proposition 2.1.29 *La moyenne d'une martingale est constante au cours du temps : pour tout* $t \in \mathbb{T}$, $E(X_t) = E(X_0)$

Cette proposition stipule qu'une martingale est un processus stochastique sans tendance haussière ni baissière. Autrement dit, "la valeur moyenne d'une martingale attendue pour demain sachant toute l'information dont on dispose aujourd'hui est égale à sa valeur d'aujourd'hui". Cette propriété fait que les martingales soient l'archétype de modèle d'un jeu dynamique équitable ou équilibré.
Le théorème suivant stipule qu'une sous-martingale se décompose de façon unique en une martingale et un processus croissant prévisible.

Théorème 2.1.30 *Soit* $\{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ *sous-martingale.* $\{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ *s'écrit de façon unique sous la forme* $X_t = A_t + M_t$ *où* $\{M_t\}_t$ *est une martingale et* $\{A_t\}_t$ *un processus prévisible appelé compensateur de la sous-martingale* $\{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$.

Un exemple de sous-martingale est donné par le processus de comptage. Concrètement,

Proposition 2.1.31 *Soit* $(N_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *un processus de comptage d'intensité* λ *et* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *une filtration associée. Alors le processus* $(M_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *défini par*

$$\forall t \in \mathbb{T}, \quad M_t = N_t - \lambda t$$

est une $(\mathcal{F}_t)$*-martingale.*

Dans ce qui suit, nous illustrons un exemple de compensation d'une sous martingale en une martingale. Soit $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{T}}$ une chaîne de Markov à temps continu, homogène, irréductible ayant pour espace d'états $\mathbb{E} = \{s_1, ..., s_n\}$ et matrice d'intensité $\Lambda = (\lambda^{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. Notons par

$$\mathcal{Y}^i = \{j \in \mathbb{E}, \lambda^{ij} > 0\}$$

l'ensemble des états directement accessibles à partir de i et, par Y_{s_-} et Y_s des variables aléatoires décrivant la chaîne de la Markov entre deux instants successifs. Nous introduisons pour chaque couple $(i, j) \in E \times E$ le processus de comptage $(N^{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ défini par

$$N_t^{ij} = |\{s, 0 < s \leq t, X_{s^-} = i, X_s = j\}|$$

qui représentent le nombre de transitions directes de Y de l'état i à l'état $j \in \mathcal{Y}^i$ dans l'intervalle de temps $(0, t]$. D'après un résultat fondamental d'analyse stochastique que nous citons ici sans démonstration, il est possible d'associer au processus de comptage N^{ij} une martingale que nous noterons M^{ij}.

Théorème 2.1.32 (Brémaud [3])
Si $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction telle que, pour tout $t \in \mathbb{T}$,

$$E\Big[\int_0^t \sum_{j\neq X_s} \lambda_{X_s j} f(X_s, j)ds\Big] < \infty,$$

alors

$$\sum_{0<s\leq t} f(X_{s^-}, X_s) - \int_0^t \sum_{j\neq X_s} \lambda_{X_s j} f(X_s, j)ds$$

est une $(\mathbb{P}, \mathcal{F}_t)-$martingale.
En particulier, si $f(i, j) = \mathbb{I}_{i=k} \times \mathbb{I}_{j=l}$ et $\sum_{0<s\leq t} f(X_{s^-}, X_s) = N_t^{kl}$ est le nombre de transitions de la chaîne Y de l'état k à l'état l durant la période

$(0, t]$ *alors*

$$N_t^{kl} - \lambda_{kl} \int_0^t \mathbb{I}_{X_s = k} ds$$

est une $(\mathbb{P}, \mathcal{F}_t)-$*martingale.*

Pour les besoins de la modélisation, nous avons besoin

1. d'une théorie d'intégrale stochastique de la forme

$$\int_0^t h_s dA_s$$

   où h est intégrable et A un processus qui est une variation positive ou nulle.

2. d'une formule d'Itô dans le cadre des processus de comptage.

Intégration stochastique

Le calcul stochastique a pour but de traiter les questions relatives à l'intégration et à la dérivation (différentiation) d'un processus stochastique. L'opération de dérivation permet d'étudier le comportement local de la dynamique d'un processus stochastique pour un intervalle de temps infiniment petit (dt) ; tandis que l'opération d'intégration permet d'étudier le comportement global de la dynamique d'un processus sur un intervalle de temps fini quelconque ($[a, b]$). Dans la suite, nous allons nous attarder sur l'opération d'intégration stochastique.

Définition 2.1.33 *1. Un processus $A = (A_t)_{t \in \mathbb{T}}$ est dit avoir des variations finies (on dit aussi que le processus est une variation finie) sur*

[0,T], s'il satisfait la condition suivante :

$$\int_0^T |dA_t| < +\infty.$$

2. *La classe des processus adaptés à trajectoires càdlàg* $A = (A_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *avec* $A_0 = 0$*, tels que les trajectoires de* A *ont des variations finies sur l'intervalle* $[0,T]$ *est notée* $\mathcal{V}_T$*.*
3. *Un processus dans* $\mathcal{V}_T$ *tel que*

$$E\Big(\int_0^T |dA_t|\Big) < +\infty$$

est dit intégrable sur $[0,T]$*.*

Nous notons par $\mathcal{A}_T$ *la classe composée de tels processus.*

4. *La classe des processus appartenant à* $\mathcal{A}_T$ *pour tout* $T < +\infty$ *est noté* $\mathcal{A}$*. Un tel processus est dit à variation intégrable.*

Proposition 2.1.34 1. *Supposons que* M *est une martingale de variation positive ou nulle et que* $h = (h_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *est un processus prévisible satisfaisant :*

$$\forall t \in \mathbb{T}, E\Big(\int_0^t |h_s||dM_s|\Big) < +\infty,$$

alors le processus X *défini par :*

$$X_t = \int_0^t h_s dM_s$$

est une martingale.

2. *Soit* A *un processus prévisible de variation positive ou nulle et* h *un processus prévisible satisfaisant*

$$\forall t \in \mathbb{T}, E\Big(\int_0^t |h_s||dA_s|\Big) < +\infty$$

le processus

$$X_t = \int_0^t h_s dA_s$$

est prévisible.

Comme le théorème fondamental du calcul de Leibniz définit les règles de dérivation et d'intégration de la plupart des fonctions déterministes, nous avons un analogue dans le calcul stochastique, à savoir le Lemme (formule) d'Itô. Dans notre travail nous allons nous limiter à l'étude et l'application de ce Lemme dans l'intégration stochastique des processus de comptage.

Formules d'Ito

Etant donné un espace de probabilité filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et un processus prévisible à cadlàg X. Si X peut être représenté sous la forme :

$$\forall t \in \mathbb{T}, \quad X_t = X_0 + A_t$$

où A est un processus à variation positive, alors nous disons que X est différentiable stochastiquement et nous écrivons :

$$dX_t = dA_t.$$

Dans le cadre de ce travail, le processus A sera toujours sous la forme :

$$dA_t = \mu_t dt + h_t dN_t$$

où μ et h sont des processus prévisibles et N est un processus de comptage. Soit $F(t, x)$ une fonction (lisse) à deux variables et soit le processus Z défini par

$$Z_t = F(t, X_t).$$

La question est de savoir si Z est une différentielle stochastique et si c'est le cas à quoi resemble t-elle ?

$$dX_t = \mu_t dt + h_t dN_t.$$

Entre les sauts de N, le processus X aura la dynamique

$$dX_t = \mu_t dt$$

et

$$dZ_t = \Big\{ \frac{\partial F}{\partial t}(t, X_t)dt + \mu_t \frac{\partial F}{\partial x}(t, X_t)dX_t \Big\}.$$

En d'autres termes, au temps du saut t le processus N a un saut de taille $\Delta N_t = N_t - N_{t_-} = 1$ ce qui implique que le processus X aura un saut de taille :

$$\Delta X_t = h_t \Delta N_t = h_t$$

Puisque $Z_t = F(t, X_t)$, les sauts de Z sont donnés par :

$$\Delta Z_t = F(t, X_t) - F(t_-, X_{t_-})$$

et puisque $X_t = X_{t_-} + \Delta X_t = X_{t_-} + h_t$ et que F est lisse par hypothèse, alors

$$\Delta Z_t = F(t, X_{t_-} + h_t) - F(t, X_{t_-}).$$

Si nous notons que $dN_t = 1$ au temps où il y a le saut et $dN_t = 0$ au temps où il n'y a pas de saut, nous avons la proposition suivante :

Proposition 2.1.35 *Soit X un processus stochastique dont la dynamique est décrite par :*

$$dX_t = \mu_t dt + h_t dN_t$$

où μ et h sont prévisibles, $(N_t)_{t\in\mathbb{T}}$ un processus de comptage et F une fonction de classe $C^{1,2}$. Alors pour la dynamique du processus Z tel que $Z_t = F(t, S_t)$

la formule d'Itô stipule que :

$$dZ_t = \left\{ \frac{\partial F}{\partial t}(t, X_t) + \mu_t \frac{\partial F}{\partial x}(t, X_t) \right\} dt + \{F(t, X_{t_-} + h_t) - F(t, X_{t_-})\} dN_t. \tag{2.1.15}$$

Remarque 2.1.3 *Nous pouvons écrire la formule d'Itô de la manière suivante :*

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s) dX_s + \sum_{0<s\leq t} \Big[F(X_s) - F(X_{s^-}) - \Delta X_s F'(X_{s^-}) \Big] \tag{2.1.16}$$

Si $dN_t = 0$, il n'y a pas de saut alors l'expression de saut disparaît.

2.2 Préliminaires en finance mathématique

Nous nous intéressons ici à la présentation des produits financiers et sur les concepts et hypothèses majeurs qui permettent d'étudier les problèmes d'évaluation et de couverture des produits dérivés.

2.2.1 Présentation des produits financiers

Dans l'objectif d'avoir une bonne compréhension de notre travail, nous commençons par une présentation des produits financiers. Nous distinguons les titres de base et des produits dérivés.

Un titre financier est un instrument négociable, coté ou susceptible de l'être représentant selon le cas, une part du capital social de l'émetteur, une part d'un emprunt à long terme émis par une société ou collectivité publique. Il s'agit généralement des actions ou les obligations.

Une action est un titre cessible, négociable, nominatif ou au porteur, représentant une participation sociale d'une entreprise à laquelle sont attachés différents droits définis par la législation de l'entreprise.

Une obligation est titre de créance correspondant à un prêt effectué par le propriétaire de l'obligation à l'institution qui a émis ou vendu l'obligation.

Le caractère aléatoire de la dynamique du prix de ces titres de base a conduit à l'introduction dans les marchés financiers des produits qui jouent un rôle d'assurance contre cette variabilité : Ces produits portent le nom de **produits dérivés**.

Les produits dérivés sont des instruments financiers dont la valeur dépend de celle d'un titre de base.

Exemple 2.2.1 *Le prix du cacao est très fluctuant. Un planteur souhaite* *se prémunir contre ces variations du prix. Il va chercher un contrat qui lui permettra à une certaine échéance de vendre son cacao à un prix K.*

Les produits dérivés les plus courants sont les options.

Une option est un contrat établi entre deux parties et permettant à l'une des parties de s'assurer, moyennant le versement d'une prime, le droit mais non l'obligation d'acheter ou de vendre à l'autre partie un actif donné à un prix prédéterminé, à l'issue d'une période ou pendant une certaine période. De ce fait, nous distinguons deux types d'options à savoir : une option d'achat et option de vente.

Une option d'achat (ou call) sur une valeur mobilière est un contrat passé entre deux parties à une date t et donnant le droit (et non l'obligation) à l'acquéreur d'acheter cette valeur (sous-jacent) à un prix convenu à l'avance (prix d'exercice) à une date T ultérieure à t ou avant cette date.

Une option de vente (ou put) sur une valeur mobilière est un contrat donnant le droit à l'acquéreur de vendre cette valeur à un prix convenu à l'avance.

L'acquéreur peut donc exercer son droit à l'échéance (option est alors dite Européenne) ou à toute date avant l'échéance (option Américaine). L'acquéreur en contrepartie de ce droit verse une somme appelée prime ou prémium (prix de l'option). Le prémium est coté pour chaque série d'options, une série étant définie par le sous-jacent, le type, l'échéance et le prix d'exercice.

Les options peuvent être utilisées soit en couverture de risque de baisse ou hausse, soit pour spéculer à la baisse ou à la hausse. A l'instar du prix d'une action qui n'est pas déterminé seulement par l'offre et la demande sur le marché, le prix d'une option (appelé aussi prime) dépend aussi des anti-

cipations de résultats de la valeur à l'échéance. La valeur d'une option est par conséquent composée de deux parties : la valeur intrinsèque et la valeur temps.
La valeur intrinsèque est égale à la valeur réelle de l'option, c'est à dire, le profit qui serait obtenu immédiatement si l'on décidait d'exercer l'option.
La valeur temps est la différence entre le cours de l'option et sa valeur intrinsèque.

L'ensemble des produits financiers détenus par un agent financier ou un investisseur à une date donnée constituent son portefeuille.

2.2.2 Notion de portefeuille

Nous introduisons ici la notion de portefeuille en faisant l'hypothèse que le marché financier ne dispose que de deux titres de base. La généralisation à un nombre fini est évidente et nous référons le lecteur à [12].

Définition 2.2.2 *Une stratégie d'investissement ou de portefeuille est la donnée d'un processus adapté* $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{T}} = (\phi_t, \psi_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *où* ϕ_t, ψ_t *répresentent respectivement les quantités des deux produits financiers détenus à la date* t.

A chaque quantité d'actifs financiers, nous pouvons associer son prix unitaire et en déduire la valeur du portefeuille, un processus stochastique qui s'exprime de la manière suivante :

Définition 2.2.3 *Soient* $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{T}} = (\phi_t, \psi_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *un portefeuille et* $(B_t, S_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *le processus des prix des deux titres de base de notre marché.*

1. *La valeur du portefeuille ou processus de valeur du portefeuille notée* V_t^Φ *est :*
$$V_t^\Phi = \phi_t B_t + \psi_t S_t.$$

2. $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{T}} = (\phi_t, \psi_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *est dit auto-financé si :*

$$dV_t^{\Phi} = \phi_t dB_t + \psi_t dS_t.$$

3. *Soit* $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *une stratégie de portefeuille auto-financé.* $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *est dit admissible si*

$$\forall t \in \mathbb{T}, \quad V_t^{\Phi} \geq 0.$$

Autrement dit, un portefeuille est auto-financé si les variations du portefeuille sont exclusivement dues aux variations du prix des produits financiers.
Dans la modélisation, l'on fera beaucoup l'hypothèse que le portefeuille est autofinancé ce qui suppose qu'il n'y a pas d'injection de capital durant la période d'étude.

2.2.3 Opportunité d'arbitrage et marché complet

En finance une opportunité d'arbitrage consiste littéralement à une situation où "on peut gagner de l'argent sans prendre de risque". Dans cette Section, nous allons explorer cette hypothèse qui est fondamentale pour l'évaluation des produits dérivés.
Une stratégie de portefeuille admissible est une opportunité d'arbitrage si :
• Investissement nul à l'instant initial
• Possibilité de gain à tout moment
• Sans aucune possibilité de perte à l'échéance.
Cela se décrit mathématiquement de la manière suivante :

Définition 2.2.4 *Soit* $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *une stratégie de portefeuille admissible.* $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *est une opportunité d'arbitrage si :*

$$\begin{cases} V_0^{\Phi} = 0 \\ V_t^{\Phi} \geq 0 \quad \mathbb{P}-p.s \quad t \in [0,T] \\ E(V_T^{\Phi}) > 0 \end{cases}.$$

L'absence d'opportunité d'arbitrage est l'hypothèse de base en finance mathématique. Ceci conduit à la loi suivante dit *loi fondamentale de la finance* qui stipule que :
Dans un marché très liquide où il n'y a ni couts de transactions, ni limitation sur la gestion des actifs sous-jacents, il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage, en d'autres termes, il y'a absence d'opportunité d'arbitrage, c'est-à-dire, qu'il n'est pas possible de gagner de l'argent à coup sûr à partir d'un investissement nul".

Définition 2.2.5 *Soit $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{T}}$ une stratégie de portefeuille admissible décrivant un modèle de marché financier. Ce dernier est dit sans arbitrage ou encore viable si*

$$V_0^{\Phi} = 0 \Longrightarrow V_T^{\Phi} = 0 \quad \mathbb{P} - p.s$$

Un marché est donc viable s'il y a absence d'opportunité d'arbitrage (AOA). Dans cette situation le résultat suivant nous donne une comparaison des portefeuilles.

Proposition 2.2.6
1. *En AOA, si deux portefeuilles autofinancés $(\Phi_t^1)_{t\in\mathbb{T}}$ et $(\Phi_t^2)_{t\in\mathbb{T}}$ ont la même valeur à la date terminale T, alors ils ont encore la même valeur à la date initiale 0, c'est à dire,*

$$V_T^{\Phi^1} = V_T^{\Phi^2} \Longrightarrow V_0^{\Phi^1} = V_0^{\Phi^2}.$$

2. *En AOA, si deux portefeuilles autofinancés $(\Phi_t^1)_{t\in\mathbb{T}}$ et $(\Phi_t^2)_{t\in\mathbb{T}}$ ont la même valeur à la date terminale T, alors ils ont même valeur presque sûrement en tout instant $t \leq T$, c'est à dire,*

$$V_T^{\Phi^1} = V_T^{\Phi^2} \Longrightarrow \forall t \leq T, \quad V_t^{\Phi^1} = V_t^{\Phi^2}.$$

3. *En AOA, deux portefeuilles autofinancés vérifient la relation suivante*

$$V_T^{\Phi^1} \leq V_T^{\Phi^2} \Longrightarrow \forall t \leq T, \quad V_t^{\Phi^1} \leq V_t^{\Phi^2}.$$

Sous la notion d'AOA, nous pouvons résoudre le problème d'évaluation. La question est comment attribuer à un actif conditionnel ou dérivé une notion de valeur. Dans ce qui suit, nous présentons les deux stratégies d'évaluation d'une option : *la réplication* et *la probabilité risque-neutre.*

2.2.4 Stratégie de réplication

L'evaluation par replication consiste à trouver un portefeuille de produits financiers présents sur le marché qui reproduit de façon exacte les flux financiers dans les différents scénari ou états de la nature possibles.

Définition 2.2.7

1. *Soit C une variable aléatoire définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. C est un actif conditionnel s'il est à valeurs positives.*
2. *Soit C un actif conditionnel. C est dit replicable (atteignable ou simulable) s'il existe une stratégie de portefeuille autofinancé $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{T}}$ telle que*

$$V_T^{\Phi} = C, \quad \mathbb{P} - p.s$$

   La stratégie $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est alors appelée stratégie de réplication.
3. *Un modèle de marché financier viable est complet si tout actif conditionnel est replicable.*

Dans un marché financier, les investisseurs sont généralement averses au risque (i.e., redoutent le risque de perdre leur mise en raison des variations des actifs sous-jacents). Etant en possession d'une mesure de probabilité d'occurence des différents scénarios résumés par $(\Omega, \mathcal{F})$ representée par $\mathbb{P}$, le modélisateur cherchera une autre mesure de probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$ qui bien que n'étant pas observée sur le marché permet de se ramener à un marché risque-neutre, i.e, un marché où les investisseurs sont indifférents au risque et peuvent donc s'engager à investir. Cette mesure de probabilité est appelée *probabilité risque-neutre* ou encore *mesure équivalente martingale*. Avant de présenter cette notion nous aurons besoin du principe d'actualisation.

2.2.5 Notion de probabilité risque-neutre

Considérons le portefeuille $\Phi = (\phi_t, \psi_t)_{t\in\mathbb{T}}$ où ϕ_t et ψ_t désignent respectivement les quantités d'actifs non risqué et risqué avec pour prix unitaires respectifs B_t et S_t.
La valeur $\frac{S_t}{B_t}$ est la *valeur actualisée* de S_t et sera notée $\widetilde{S}_t$. Elle correspond à la valeur relative de S_t par rapport à B_t. Autrement dit, elle donne le nombre d'actif non risqué que l'on peut acheter avec un actif risqué au temps t.

Définition 2.2.8 *Soit $\widetilde{\mathbb{P}}$ une mesure de probabilité équivalente à $\mathbb{P}$. $\widetilde{\mathbb{P}}$ est une probabilité risque-neutre si le prix actualisé de l'actif risqué $\widetilde{S}_t$ est une martingale sous $\widetilde{\mathbb{P}}$.*

Etant en connaissance d'une probabilité risque-neutre, le théorème suivant caractérise la valeur d'un portefeuille actualisé.

Théorème 2.2.9 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ représentant les ensembles d'informations dans un marché financier sans arbitrage. Soient $\widetilde{\mathbb{P}}$ une probabilité risque-neutre et C un actif conditionnel. Pour toute stratégie admissible $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{T}}$ repliquant l'actif conditionnel C, le processus de valeur actualisée du portefeuille associé s'écrit :*

$$\widetilde{V_t^{\Phi}} = E^{\widetilde{\mathbb{P}}}\Big(\frac{C}{B_T}|\mathcal{F}_t\Big).$$

En particulier, le processus $(\widetilde{V_t^{\Phi}})_{t\in\mathbb{T}}$ de la valeur actualisée du portefeuille associé est une $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$-martingale positive sous la probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$.

Nous terminons ces préliminaires en évoquant sans démonstration une version du théorème fondamental de la finance mathématique. Nous réferrons à [12]

Théorème 2.2.10 (Théorème fondamental de l'évaluation par arbitrage)

1. *Un modèle de marché financier est viable si et seulement si il existe une probabilité risque-neutre.*
2. *Un modèle de marché financier est complet si et seulement si il existe une unique probabilité risque-neutre.*

Lorsqu'un marché n'est pas complet il est incomplet. L'incomplétude du marché est caractérisée par la non replication d'un droit conditionnel par un portefeuille auto-financé, et cela implique la non existence d'un prix unique pour ce droit conditionnel, autrement dit cela implique la non unicité d'une mesure de martingale équivalente.

Chapitre 3

Modèle de marché financier markovien d'après Norberg (2003)

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la problématique de l'évaluation/valorisation d'un produit dérivé dans un modèle de marché financier qui capte deux caractéristiques généralement observées dans la réalité boursière. La première est le fait que le taux d'intérêt à court-terme, c-à-d, le loyer de l'argent déposé dans un compte d'épargne, est susceptible de changer au cours du temps comme une fonction constante par morceaux et ce suivant les différents états possibles de la nature. La deuxième est le fait que la dynamique des actifs boursiers évolue par sauts.

Pour rendre compte de cela, nous allons prémièrement introduire une chaîne de Markov à temps continu dont la dynamique guidera les principales caractéristiques du marché. Deuxièmement, nous allons nous focaliser à la question principale qui concerne l'évaluation/valorisation d'une option Européenne.

3.1 Présentation générale d'un marché markovien

Dans cette section, nous mettons en evidence les éléments de base qui gouvernent le fonctionnement d'un marché décrit par une chaîne de Markov.

3.1.1 Modèle

Processus du modèle

Sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P})$, on définit $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{T}}$ une chaîne de Markov à temps continu homogène ayant pour espace d'états $\mathbb{E} = \{s_1, ..., s_n\}$. Grâce à Elliot [8], nous pouvons identifier $\mathbb{E}$ à la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. Ainsi, dans la suite nous poserons $s_i = (0, 0, \ldots, \underbrace{1}_{i\text{-th}}, \ldots, 0)$ et souvent sera noté par i.
La chaîne de Markov Y est homogène, irréductible caractérisée par une matrice d'intensité notée $\Lambda = (\lambda^{ij})$ et une matrice de transition $P = (P^{ij})$.

Description du modèle

Nous considérons un marché financier dirigé par une chaîne de Markov à temps continu Y et se déroulant sur l'horizon temporel $t \in \mathbb{T}$. Y_t est la variable aléatoire représentant la situation (état [1]) de l'économie au temps t, $\mathcal{F}_t^Y$ représente les informations disponibles sur le marché à l'instant t et $\mathbb{F}_{\mathbb{T}}^Y$ represente la totalité de l'information accumulée sur tout $\mathbb{T}$. Nous faisons les hypothèses suivantes :
Hypothèse 1 :*Il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage sur les marchés.*
Hypothèse 2 :*Il n'existe aucun coût de transaction, taxes, ou problème d'indivisibilité des actifs. Tout le marché est compétitif, tel que chaque agent*

1. peut être l'état de récession, crise, reprise ou de croissance

économique est persuadé qu'il peut acheter ou vendre autant d'actifs qu'il souhaite au prix de marché. Sur ce marché, les échanges ne peuvent avoir lieu qu'au juste prix.

Hypothèse 3 : *Sur ce marché, il existe deux catégories d'actifs : l'actif non risqué localement et l'actif risqué.*

Actif non risqué localement

Nous l'appelons actif non risqué localement car il n'a aucun risque de défaut à court terme, , c-à-d, à court terme nous sommes à mesure de donner sa valeur exacte (compte bancaire, obligation). Il est modélisé par le processus stochastique $(B_t)_{t\in\mathbb{T}}$. *Dans le cadre de notre modèle, il est transigé de façon continue, alors sa dynamique donnée par :*

$$dB_t = r_t B_t dt, \; B_0 = 1 \quad \text{pour} \quad t \in \mathbb{T}. \tag{3.1.1}$$

r_t *représente le taux d'intérêt (loyer de l'argent). Nous définissons par* $\underline{r} = (r_1, ..., r_n)$ *le taux d'intérêt pour les états* $(s_1, ..., s_n)$ *où* r_i *est le taux d'intérêt à l'état* s_i. *Ainsi, le taux d'intérêt à l'instant* t *pour le scénario* ω *est défini par :*

$$r_t(\omega) := \langle \underline{r}, Y(\omega) \rangle = \sum_{i=1}^{n} r_i \langle s_i, Y_t \rangle. \tag{3.1.2}$$

c-à-d, le taux d'intérêt à l'instant t *est la combinaison des taux d'intérêt des différents états (scénarios) qui peuvent se produire à l'instant* t. *Alors la solution de 3.1.1 est*

$$B_t = \exp\Big(\int_0^t r_s ds\Big) = \exp\Big(\int_0^t \sum_{j=1}^{n} \langle s_j, Y_s \rangle r_j ds\Big). \tag{3.1.3}$$

Actif risqué

Nous désignons par $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *le processus stochastique décrivant la dynamique de l'actif risqué.*
A $t = 0$ S_0 *est connu et à* $t > 0$ S_t *est inconnu*
Nous désignons par $\frac{dS_t}{S_{t\_}}$ *le rendement de l'actif risqué, ce rendement est rendu disponible par deux contributions : la contribution déterministe conditionnellement à la trajectoire de la chaîne de Markov (certaine, si nous connaissons l'état u marché) et la contribution stochastique (aléatoire).*

La contribution déterministe *est donnée par*

$$\sum_{j\in\mathbb{E}} \alpha_j \langle s_j, Y_t \rangle dt \tag{3.1.4}$$

Chaque α_j *représente la dérive (drift) qui est le coefficient de variation constant, autrement dit, le coefficient mesurant la tendance du marché à l'état* j.

La contribution stochastique *est donnée par :*

$$\sum_{j\in\mathbb{E}} \sum_{k\in\mathcal{Y}^j} (\exp(\beta^{jk}) - 1) dN_t^{jk} \tag{3.1.5}$$

Ici $\exp(\beta^{jk}) - 1$ *représente la taille relative du saut ou la volatilité du saut de l'actif risqué. Plus précisément, c'est le paramètre mesurant la tendance du cours de l'actif risqué à fluctuer de l'état* j *vers l'état* k.

Alors sa dynamique est décrite par :

$$dS_t = S_{t^-} \Big[\sum_{j\in\mathbb{E}} \alpha_j \langle s_j, Y_t \rangle dt + \sum_{j\in\mathbb{E}} \sum_{k\in\mathcal{Y}^j} (\exp(\beta^{jk}) - 1) dN_t^{jk} \Big] \tag{3.1.6}$$

où α_j, β^{jk} sont des constantes et au moins un des β^{jk} est non nulle. On note par dN_t^{jk} la forme différentielle associée à la mesure de comptage N_t^{jk}.

Par la formule d'Itô (voir Annexe 2), on montre que la solution de l'équation (3.1.6) est donnée par

$$S_t = S_0 \exp\Big[\sum_{j\in\mathbb{E}} \alpha_j \int_0^t \langle s_j, Y_s\rangle ds + \sum_{j\in\mathbb{E}} \sum_{k\in\mathcal{Y}^j} \beta^{jk} N_t^{jk}\Big] \tag{3.1.7}$$

Nous aurons besoin dans la suite du prix actualisé de l'actif risqué noté $\widetilde{S}$ et défini par :

$$\begin{aligned} \widetilde{S}_t &= \frac{S_t}{B_t} \\ &= S_0 \exp\Big[\sum_{j\in\mathbb{E}} (\alpha_j - r_j) \int_0^t \langle s_j, Y_s\rangle ds + \sum_{j\in\mathbb{E}} \sum_{k\in\mathcal{Y}^j} \beta^{jk} N_t^{jk}\Big] \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

et sa dynamique est décrite par l'équation différentielle stochastique

$$d\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_{t^-}\Big[\sum_{j\in\mathbb{E}} (\alpha_j - r_j)\langle s_j, Y_t\rangle dt + \sum_{j\in\mathbb{E}} \sum_{k\in\mathcal{Y}^i} (\exp(\beta^{jk}) - 1) dN_t^{jk}\Big] \tag{3.1.9}$$

Remarque 3.1.1 *Le fait d'actualiser permet de traiter des prix relativement à un numéraire, ce qui permet d'éviter la question de l'inflation et donc permet de voir tout à la valeur d'aujourd'hui.*

Hypothèse 4 : *Les investisseurs sont suffisamment tolérants vis-à-vis du risque pour qu'ils puissent accepter de détenir un actif risqué ayant une espérance de rendement finie.*

3.1.2 Évaluation d'une Option Européenne dans un univers risque-neutre

Nous avons vu dans les préliminaires que l'une des façons d'évaluer un produit dérivé dans un marché viable (c-à-d, ne présentant pas d'opportunités d'arbitrages) consistait à trouver une mesure de probabilité risque-neutre ou encore une mesure équivalente martingale.

Condition Martingale

Dans cette sous-section nous cherchons les conditions pour lesquelles le prix actualisé est une martingale.
Pour ce faire, l'on va définir un changement de mesures de probabilités équivalentes qui permet notamment de changer les paramètres caractéristiques de la chaîne de Markov. En particulier, l'on va montrer qu'il existe une mesure de probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$ équivalente à $\mathbb{P}$ sous laquelle Y est une chaîne de Markov avec une autre matrice d'intensité.
L'on suppose que la chaîne Y est entièrement caractérisée sous $\mathbb{P}$ par (Π_0, Λ), où Π_0 est la distribution de probabilité initiale et $\Lambda := (\lambda_{ij})_{1 \le i,j \le M}$ la matrice d'intensité. Nous supposerons dans la suite sans perte de généralité que le changement de mesure n'affecte que la matrice d'intensité. Nous avons besoin d'introduire certaines notations (voir Elliott [5]).

- Soit $\lambda := \Big(\lambda_{11}, \lambda_{22}, ..., \lambda_{nn}\Big)' \in \mathbb{R}^n$ et $\Lambda_0 := \Lambda - \mathbf{Diag}(\lambda)$ où $\mathbf{Diag}(\lambda)$ est la matrice diagonale dont les élements sont donnés par le vecteur λ ;
- Soit $\Sigma := \Big\{(\widetilde{\lambda}^{ij})_{1 \le i,j \le n} : \forall 1 \le i \ne j \le n, \quad \widetilde{\lambda}^{ij} \ge 0 \; et \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\lambda}^{ij} = 0\Big\}$ l'ensemble de toutes les matrices d'intensité possibles pour Y ;
- $\forall \widetilde{\Lambda}$, $\Lambda \in \Sigma$ nous définissons $\widetilde{\Xi} := \widetilde{\Lambda}/\Lambda$ la matrice définie par $\widetilde{\Xi} := (\widetilde{\lambda}^{ij}/\lambda^{ij})_{1 \le i,j \le n}$;
- $\mathbf{1} := (1, 1, ..., 1)' \in \mathbb{R}^n$ and $\mathbf{I}$ la matrice identité.

Nous avons supposé que Y était irréductible donc $\lambda^{ij} \neq 0$ par suite $\widetilde{\widetilde{\Xi}}$ est bien définie.
Soit le processus de comptage $\mathbf{N} := \{\mathbf{N}_t : t \in \mathbb{T}\}$ avec

$$\mathbf{N}_t = \int_0^t \Big(\mathbf{I} - \mathbf{Diag}(Y_{s^-})\Big) dY_s. \tag{3.1.10}$$

Sa composante $N_t(i)$ compte le nombre de fois que la chaîne Y entre dans l'état s_i durant l'intervalle de temps $[0, t]$ pour $i = 1, 2, ..., n$.

Dufour et Elliot [5] ont montré que le processus définie par

$$\widetilde{\mathbf{N}}_t := \mathbf{N}(t) - \int_0^t \Lambda_0 Y_{u^-} du, \quad t \in \mathbb{T} \tag{3.1.11}$$

est une $(\{\mathcal{F}_t^Y\}_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P})-$martingale. Par conséquent, nous pouvons énoncer le résultat suivant

Proposition 3.1.1 *Le processus* $\Upsilon := \{\Upsilon_t : t \in \mathbb{T}\}$ *défini par*

$$\Upsilon_t = 1 + \int_0^t \Upsilon_{u^-}[\widetilde{\widetilde{\Xi}}_0 Y_{u^-} - \mathbf{1}]' d\widetilde{\mathbf{N}}_u \tag{3.1.12}$$

est une $(\{\mathcal{F}_t^Y\}_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P})$*-martingale sous certaines conditions de régularité des coefficients de* $\widetilde{\widetilde{\Xi}}_0$*.*
Ainsi, en posant

$$\frac{d\widetilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\bigg|_{\mathcal{F}_t^Y} := \Upsilon_t \tag{3.1.13}$$

nous définissons une mesure de probabilité absolûment continue $\widetilde{\mathbb{P}}$ *par rapport à* $\mathbb{P}$ *sous laquelle* Y *est une chaîne de Markov de matrice d'intensité* $\widetilde{\Lambda}$*.*

Pour la preuve nous réferrons à Dufour et Elliot [5].

La proposition suivante donne une expression explicite à cette densité de probabilités.

Proposition 3.1.2
Nous avons que

$$\frac{d\widetilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\Big|_{\mathcal{F}_t^Y} = \exp\Big\{ -\int_0^t [\widetilde{\Xi}_0 Y_{s^-} - \mathbf{1}]'\Lambda_0 Y_{s^-} ds \Big\} \prod_{0<s\leq t} \Big(1 + [\widetilde{\Xi}_0 Y_{s^-} - \mathbf{1}]'\Delta N_s \Big). \tag{3.1.14}$$

Plus encore,

$$\frac{d\widetilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\Big|_{\mathcal{F}_t^Y} = \prod_{1\leq i\neq j\leq n} \exp\Bigg\{ -\int_0^t (\widehat{\theta}_s^{ij} - \theta_s^{ij})ds + \int_0^t \log\Big(\frac{\widehat{\theta}_s^{ij}}{\theta_s^{ij}}\Big) dN_s^{ij} \Bigg\}, \tag{3.1.15}$$

avec pour $i \neq j$,

- $N_t^{ij} := \sum_{0<s\leq t} \langle Y_{s^-}, \mathbf{s}_i \rangle \langle Y_s, \mathbf{s}_j \rangle$ *le nombre de fois que Y passe de l'état $\mathbf{s}_i$ à l'état $\mathbf{s}_j$ durant l'intervalle de temps $(0,t]$ (dN_t^{ij} désigne sa forme différentielle) ;*
- $\theta_t^{ij} := \lambda^{ij} \langle Y_{t^-}, \mathbf{s}_i \rangle \langle Y_t, \mathbf{s}_j \rangle$ *;*
- $\widehat{\theta}_t^{ij} := \widetilde{\lambda}^{ij} \langle Y_{t^-}, \mathbf{s}_i \rangle \langle Y_t, \mathbf{s}_j \rangle$.

Nous pouvons désormais dériver la condition martingale. Pour ce faire, à l'aide de la Proposition 3.1.1, nous définissons le processus des martingales associées à $(N_t^{jk})_{t\in\mathbb{T}}$ sous la mesure $\widetilde{\mathbb{P}}$.

$$\widetilde{M}_t^{jk} = N_t^{jk} - \langle Y_{t^-}, \mathbf{s}_i \rangle \langle Y_t, \mathbf{s}_j \rangle t \widetilde{\lambda}^{jk} \tag{3.1.16}$$

Exprimons $d\widetilde{S}_t$ de la formule 3.1.9 à l'aide de cette martingale. En remplaçant dN_t^{ik} de la relation 3.1.16 dans 3.1.9, nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
d\widetilde{S}_t &= \widetilde{S}_{t^-}\Big[\sum_{j\in\mathbb{E}}(\alpha_j - r_j)\langle Y_t,\mathbf{s}_j\rangle dt \\
&+ \sum_{j\in\mathbb{E}}\sum_{k\in\mathcal{Y}^i}\Big(\exp(\beta^{jk})-1\Big)\Big(d\widetilde{M}_t^{jk} + \langle Y_{t^-},\mathbf{s}_i\rangle\langle Y_t,\mathbf{s}_j\rangle\widetilde{\lambda}^{jk}dt\Big)\Big] \\
&= \widetilde{S}_{t^-}\Big[\sum_{j\in\mathbb{E}}\Big(\alpha_j - r_j + \sum_{k\in\mathcal{Y}^i}\Big(\exp(\beta^{jk})-1\Big)\widetilde{\lambda}^{jk}\langle Y_{t^-},\mathbf{s}_i\rangle\Big)\langle Y_t,\mathbf{s}_j\rangle dt \\
&+ \sum_{j\in\mathbb{E}}\sum_{k\in\mathcal{Y}^i}\Big(\exp(\beta^{jk})-1\Big)d\widetilde{M}_t^{jk}\Big] \qquad (3.1.17)
\end{aligned}
$$

Nous cherchons les conditions pour lesquelles ce prix actualisé est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale.

$$
\begin{aligned}
E\Big(d\widetilde{S}_t\Big|\mathcal{F}_s^Y\Big) &= E\Big(\widetilde{S}_{t^-}\sum_{j\in\mathbb{E}}\Big(\alpha_j - r_j + \sum_{k\in\mathcal{Y}^i}(\exp(\beta^{jk})-1)\widetilde{\lambda}^{jk}\langle Y_{t^-},\mathbf{s}_i\rangle)\langle Y_t,\mathbf{s}_j\rangle dt\Big)\Big|\mathcal{F}_s^Y\Big) \\
&+ E\Big(\widetilde{S}_{t^-}\sum_{j\in\mathbb{E}}\sum_{k\in\mathcal{Y}^i}(\exp(\beta^{jk})-1)d\widetilde{M}_t^{jk}\Big|\mathcal{F}_s^Y\Big) \\
&= E\Big(\widetilde{S}_{t^-}\sum_{j\in\mathbb{E}}(\alpha_j - r_j + \sum_{k\in\mathcal{Y}^i}(\exp(\beta^{jk})-1)\langle Y_{t^-},\mathbf{s}_i\rangle\widetilde{\lambda}^{jk}))\langle Y_t,\mathbf{s}_j\rangle dt\Big|\mathcal{F}_s^Y\Big) \\
&+ E\Big(\widetilde{S}_t\sum_{j\in\mathbb{E}}\sum_{k\in\mathcal{Y}^i}(\exp(\beta^{jk})-1)d\widetilde{M}_s^{jk}\Big|\mathcal{F}_s^Y\Big)
\end{aligned}
$$

Pour que $d\widetilde{S}_t$ soit une martingale il suffit que $\forall j\in E$,

$$
\alpha_j - r_j + \sum_{k\in\mathcal{Y}^j}(\exp(\beta^{jk})-1)\langle Y_{t^-},\mathbf{s}_i\rangle)\widetilde{\lambda}^{jk} = 0 \qquad (3.1.18)
$$

L'équation 3.1.18 est appelée *équation martingale* d'inconnue $\widetilde{\lambda}^{jk}$ et donne la condition sur les paramètres du modèle. Nous admettons que les paramètres ont été choisis tels que cette équation admette au moins une solution. Ceci implique donc l'existence d'une mesure équivalente martingale ou encore mesure risque-neutre. Ainsi, nous pouvons donc évaluer le produit dérivé en l'occurrence une option Européenne dont la dynamique ci-dessous est obtenue de 3.1.17 en appliquant la condition 3.1.18

$$d\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_{t^-} \sum_{j \in \mathbb{E}} \sum_{k \in \mathcal{Y}^j} (\exp(\beta^{jk}) - 1) d\widetilde{M}_t^{jk}. \tag{3.1.19}$$

Nous considérons en particulier le cas d'une option Européenne d'achat dont le payoff est $\max(S_T - K, 0)$ avec K qui désigne le prix d'exercice de l'option et T désigne évidemment la maturité qui coincide ici avec le temps terminal. Avec ces hypothèses, nous connaissons la valeur à l'instant T de l'option qui est

$$V_T = \max(S_T - K, 0). \tag{3.1.20}$$

Pour déterminer V_t pour toute date $t \in [0, T)$, nous appliquons le principe de l'évaluation risque-neutre qui stipule que la valeur actualisée de l'option $(\widetilde{V}_t := \frac{V_t}{B_t})_{t \in \mathbb{T}}$ est une martingale sous la mesure $\widetilde{\mathbb{P}}$. Ainsi, nous obtenons :

$$V_t = B_t E^{\widetilde{\mathbb{P}}} \Big[\max\Big(\widetilde{S}_T - \frac{K}{B_T}, 0\Big) \Big| \mathcal{F}_t \Big]. \tag{3.1.21}$$

Le calcul de cette intégrale se fait au moyen des simulations Monte Carlo connaissant la dynamique de $\widetilde{S}$ sous $\widetilde{\mathbb{P}}$.

3.1.3 Évaluation d'une Option Européenne par réplication

En plus de l'approche par neutralisation du risque il existe une autre approche qui consiste, lorsque cela est possible, à répliquer ou dupliquer le payoff de l'option par un portefeuille formé d'actifs transigés sur le marché. Cette section est consacrée à la présentation de cette technique dans le cadre du modèle discuté ici.

Nous considérons donc un actif conditionnel (plus concrètement une option Européenne) de payoff actualisé $\widetilde{H}$ où $H = h(Y_T, S_T)$. Il est duplicable si l'on peut trouver un portefeuille auto-financé Φ tel que

$$\widetilde{V}_T^{\Phi} = \widetilde{H}. \tag{3.1.22}$$

Pour un instant $t < T$, nous définissons le prix de l'actif conditionnel à la date t par

$$\pi_t = \sum_{j}^{n} \langle Y_t, s_j \rangle f^j(t, S_t) \tag{3.1.23}$$

où $f^j(t, S_t)$ est le prix du droit conditionnel à l'état j à l'instant t.
De plus, nous supposons que ces fonctions sont continues et différentiables.
Le prix actualisé de ce droit conditionnel est

$$\widetilde{\pi}_t = exp(-\int_0^t r_s ds) \sum_{j}^{n} \langle Y_t, s_j \rangle f^j(t, S_t). \tag{3.1.24}$$

En appliquant la formule d'Itô (voir Annexe 3), nous obtenons sa dynamique suivante :

$$
\begin{aligned}
d\widetilde{\pi}_t &= \exp\Big(-\int_0^t r_s ds\Big)\sum_j^n \langle Y_t, s_j\rangle\Big(-r_t f^j(t,S_t) + \frac{\partial}{\partial t} f^j(t,S_t) + \frac{\partial}{\partial S} f^j(t,S_t) S_{t-}\alpha_t\Big)dt \\
&+ \exp\Big(-\int_0^t r_s ds\Big)\sum_{j=1}^n \sum_{k\in\mathcal{Y}^j}\Big(f^k(t, S_{t^-}\exp(\beta^{jk})) - f^j(t,S_{t^-})\Big)dN_t^{jk} \\
&= \exp\Big(-\int_0^t r_s ds\Big)\sum_j^n \langle Y_t, s_j\rangle\Big[\Big(-r_t f^j(t,S_t) + \frac{\partial}{\partial t} f^j(t,S_t) + \frac{\partial}{\partial S} f^j(t,S_t) S_{t-}\alpha_t \\
&+ \sum_{k\in\mathcal{Y}^j}\Big\{(f^k(t,S_{t^-}\exp(\beta^{jk})) - f^j(t,S_{t^-}))\Big\}\widetilde{\lambda}^{jk}\Big)dt \\
&+ \sum_j^n \sum_{k\in\mathcal{Y}^j}\Big(f^k(t,S_{t^-}\exp(\beta^{jk})) - f^j(t,S_{t^-})\Big)d\widetilde{M}_t^{jk}\Big] \qquad (3.1.25)
\end{aligned}
$$

La propriété martingale de $(\widetilde{\pi}_t)_{t\in\mathbb{E}}$ stipule que

$$E^{\widetilde{\mathbb{P}}}[\widetilde{H}|\mathcal{F}_t] = \widetilde{\pi}_t. \qquad (3.1.26)$$

De plus, elle assure que la dynamique $d\widetilde{\pi}_t$ ne contient pas le terme déterministe (c-à-d, en dt). Plus formellement, nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
&-r^j f^j(t,S_t) + \frac{\partial}{\partial t} f^j(t,S_t) + \frac{\partial}{\partial S} f^j(t,S_t) S_t \alpha^j \\
&\qquad + \sum_{k\in\mathcal{Y}^j}\Big\{f^k(t,S_{t^-}\exp(\beta^{jk})) - f^j(t,S_{t^-})\Big\}\widetilde{\lambda}^{jk} = 0. \qquad (3.1.27)
\end{aligned}
$$

Le système d'équations (3.1.27) en $\{f^j(t,S) : j = 1,\cdots,n\}$ doit être résolu sous la condition de bord

$$f^j(T,s) = h(j,s) \quad \forall j \in E. \qquad (3.1.28)$$

Dès lors, avec la propriété martingale (le système d'équation précèdent), (3.1.25) devient

$$d\widetilde{\pi}_t = \exp\Big(-\int_0^t r_s ds\Big)\sum_j^n \sum_{k\in\mathcal{Y}^j}\Big(f^k(t,S_{t^-}\exp(\beta^{jk})) - f^j(t,S_{t^-})\Big)d\widetilde{M}_t^{jk} \tag{3.1.29}$$

Dans le but d'éviter toute opportunité d'arbitrage, cet actif ou droit conditionnel s'il est transigé sur le marché devrait toujours avoir à tout instant un prix (actualisé) égal à la valeur du portefeuille (actualisée) qui le duplique. C'est ainsi que nous avons :

$$\widetilde{\pi}_t = \widetilde{V}_t^{\Phi} \Rightarrow d\widetilde{\pi}_t = d\widetilde{V}_t^{\Phi}. \tag{3.1.30}$$

Connaissant $d\widetilde{\pi}_t$, déterminons $d\widetilde{V}_t^{\Phi}$.
La valeur actualisée du portefeuille $\widetilde{V}_t^{\Phi} := \phi_t + \int_0^t \psi_s \widetilde{S}_s$ et $d\widetilde{V}_t^{\Phi} := \psi_t d\widetilde{S}_t$ où $d\widetilde{S}_t$ est la martingale définie par (3.1.19). Ainsi la dynamique est donnée par :

$$d\widetilde{V}_t^{\Phi} := \psi_t \widetilde{S}_{t^-}\sum_{j\in E}\sum_{k\in\mathcal{Y}^j}(\exp(\beta^{jk})-1)d\widetilde{M}_t^{jk}. \tag{3.1.31}$$

En remplaçant (3.1.29) et (3.1.31) dans (3.1.30), nous obtenons :
Pour $t \in (0,T]$,

$$\psi_t S_{t^-}\sum_{k\in\mathcal{Y}^j}\Big(\exp(\beta^{jk})-1\Big) = \sum_{k\in\mathcal{Y}^j}\Big(f^k(t,S_{t^-}\exp(\beta^{jk})) - f^j(t,S_{t^-})\Big). \tag{3.1.32}$$

Ce qui implique que la quantité d'actif risqué est :

$$\psi_t = \frac{\sum_{k\in\mathcal{Y}^j}\Big(f^k(t,S_{t^-}\exp(\beta^{jk})) - f^j(t,S_{t^-})\Big)}{S_{t^-}\sum_{k\in\mathcal{Y}^j}\Big(\exp(\beta^{jk})-1\Big)}, \quad j\in E \tag{3.1.33}$$

et on déduit la quantité d'actif non risqué localement

$$\phi_t = \exp\Big(-\int_0^t r_s ds\Big)\Big[\sum_j^n \langle Y_t, s_j\rangle f^j(t,S_t) - \psi_t S_t\Big]. \tag{3.1.34}$$

Déterminer de façon explicite les quantités d'actifs non risqués et risqués nécessite la résolution de 3.1.27 ce qui n'est pas évident. Il est alors nécessaire d'appliquer des méthodes numériques pour résoudre le problème d'évaluation de l'option. Les simulations par méthode de Monte Carlo sont alors une technique couramment utilisée.

Chapitre 4

Modèle d'un marché financier Markovien à deux états

Dans ce chapitre, le cadre général de notre problème est l'évaluation d'une option européenne dont le payoff dépend des valeurs futures d'un actif sous-jacent. Dans un premier temps, après avoir passé en revue les outils mathématiques utiles pour la modélisation, nous modélisons l'évolution de la valeur du sous-jacent sur lequel est construit le produit financier. Ensuite, nous appliquons la méthode de Monte-Carlo à l'aide des simulations numériques, enfin, nous étudions les sensibilités de certains paramètres sur les prix des options européennes.

4.1 Présentation du marché Markovien

Nous réecrivons dans ce cas particulier à deux états les outils mathématiques qui nous seront utiles.

4.1.1 Description du marché financier

Nous considérons un marché financier modélisé dans l'espace $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ par une chaîne de Markov à temps continu $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{T}}$ ayant pour espace d'états $\mathbb{E} = \{s_1, s_2\}$. Grâce à Elliot [8] nous identifions E à la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Ainsi $s_1 = (1,0)$ et $s_2 = (0,1)$ seront souvent notés respectivement $\mathbf{1}, \mathbf{2}$ et $\forall t \in T$ la variable aléatoire Y_t est définie de la manière suivante :$Y_t : \Omega \longrightarrow E$. Cette chaîne de Markov est caractérisée par une matrice d'intensité $\Lambda = (\lambda^{ij})_{i,j=1,2}$. Concrètement nous avons $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda^{11} & \lambda^{12} \\ \lambda^{21} & \lambda^{22} \end{pmatrix}$.

4.1.2 Dynamique des actifs du modèle

Nous réecrivons la dynamique des actifs.

Actif non risqué

Le taux d'intérêt à la date t est donné sous la forme

$$r_t = r(Y(t)) := \langle \underline{r}, Y(t) \rangle$$

où $\underline{r} = (r_1, r_2)$. Par conséquent

$$r_t := \sum_{i=1}^{2} r_i \langle s_i, Y_t \rangle = r_1 \langle s_1, Y_t \rangle + r_2 \langle s_2, Y_t \rangle.$$

La dynamique du prix de l'actif non risqué qui est

$$dB_t = r_t B_t dt, \ B_0 = 1 \quad \text{pour} \quad t \in \mathbb{T} \tag{4.1.1}$$

ou de façon plus explicite

$$B_t = \exp\Big(\int_0^t r_s ds \Big) = \exp\Big(\int_0^t \sum_{i=1}^{2} r_i \langle s_i, Y_s \rangle ds \Big). \tag{4.1.2}$$

Notons que cette expression de B_t est un cas particulier pour deux états de la formule 3.1.3 générale de B_t.

Actif risqué

Nous désignons par $(S_t)_{t\in t\in\mathbb{T}}$ le processus stochastique décrivant la dynamique de l'actif risqué.
A $t = 0$, S_0 est connu et pour $t > 0$ S_t est inconnu et sa dynamique est décrite par :

$$dS_t = S_{t^-}\Big[\sum_{i=1}^{2}\alpha_i\langle s_i, Y_t\rangle dt + (\exp(\beta^{12}) - 1)dN_t^{12} + (\exp(\beta^{21}) - 1)dN_t^{21}\Big] \tag{4.1.3}$$

En appliquant la formule généralisée d'Itô à (A.3.2), nous avons en posant $F(S_t) = \ln S_t$

$$\begin{aligned}
F(S_t) &= F(S_0) + \int_0^t F'(S_{s^-})dS_s + \sum_{0<s\le t}\Big[F(S_s) - F(S_{s^-}) - \Delta S_s F'(S_{s^-})\Big] \\
&= \ln S_0 + \int_0^t \frac{1}{S_{s^-}} S_{s^-}\Big[\sum_{i=1}^{2}\alpha_i\langle s_i, Y_s\rangle ds + (\exp(\beta^{12}) - 1)dN_s^{12} + (\exp(\beta^{21}) - 1)dN_s^{21}\Big] \\
&+ \sum_{0<s\le t}(\ln S_s - \ln S_{s^-} - \frac{\Delta S_s}{S_{s^-}}) \\
&= \ln S_0 + \int_0^t \sum_{i=1}^{2}\alpha_i\langle s_i, Y_s\rangle ds + \int_0^t(\exp(\beta^{12}) - 1)dN_s^{12} + \int_0^t(\exp(\beta^{21}) - 1)dN_s^{21} \\
&+ \sum_{0<s\le t}\Big[\ln(1 + \frac{\Delta S_s}{S_{s^-}}) - \frac{\Delta S_s}{S_{s^-}}\Big]
\end{aligned}$$

$\frac{\Delta S_s}{S_{s^-}} = \sum_{j\in\mathbb{E}}\sum_{k\in\mathcal{Y}^j}\Big(exp(\beta^{jk}) - 1\Big)$

Remarque 4.1.1 *A un instant t donné, il ne peut y avoir qu'un saut entre deux états* 1 *et* 2*. Ceci résulte de la propriété des processus de comptage.*

$$
\begin{aligned}
F(S_t \quad) = \;& \ln S_0 + \int_0^t (\sum_{i=1}^{2} \alpha_i \langle s_i, Y_s \rangle) ds + \int_0^t (\exp(\beta^{12}) - 1) dN_s^{12} + \int_0^t (\exp(\beta^{21}) - 1) dN_s^{21} \\
+ \;& \sum_{0<s\leq t} \Big[\ln(1 + \exp(\beta^{12}) - 1) - (\exp(\beta^{12}) - 1) \Big] \Delta N_s^{12} \\
+ \;& \sum_{0<s\leq t} \Big[\ln(1 + \exp(\beta^{21}) - 1) - (\exp(\beta^{21}) - 1) \Big] \Delta N_s^{21} \\
= \;& \ln S_0 + \int_0^t \sum_{i=1}^{2} \alpha_i \langle s_i, Y_s \rangle ds + \int_0^t (\exp(\beta^{12}) - 1) dN_s^{12} + \int_0^t (\exp(\beta^{21}) - 1) dN_s^{21} \\
+ \;& \int_0^t \Big[\ln(1 + \exp(\beta^{12}) - 1) - (\exp(\beta^{12}) - 1) \Big] dN_s^{12} \\
+ \;& \Big[\ln(1 + \exp(\beta^{21}) - 1) - (\exp(\beta^{21}) - 1) \Big] dN_s^{21} \\
= \;& \ln S_0 + \int_0^t \sum_{i=1}^{2} \alpha_i \langle s_i, Y_s \rangle ds \int_0^t (\exp(\beta^{12}) - 1) dN_s^{12} + \int_0^t (\exp(\beta^{21}) - 1) dN_s^{21} \\
+ \;& \int_0^t \beta^{12} dN_s^{12} + \int_0^t \beta^{21} dN_s^{21} \\
- \;& \int_0^t (\exp(\beta^{12}) - 1) dN_s^{12} - \int_0^t (\exp(\beta^{21}) - 1) dN_s^{21}
\end{aligned}
$$

et finalement nous avons

$$
S_t = S_0 \exp\Big[\int_0^t \sum_{i=1}^{2} \alpha_i \langle s_i, Y_s \rangle ds + \beta^{12} N_t^{12} + \beta^{21} N_t^{21} \Big]. \tag{4.1.4}
$$

L'on en déduit aisément la dynamique de prix actualisé de l'actif risqué :

$$d\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_{t^-}\Big[\sum_{i=1}^{2}(\alpha_i - r_i)\langle s_i, Y_t\rangle dt \\ + (\exp(\beta^{12}) - 1)dN_t^{12} + (\exp(\beta^{21}) - 1)dN_t^{21}\Big] \quad (4.1.5)$$

Nous allons à présent évaluer le prix d'une option d'achat et de vente européenne dans notre modèle de marché financier, par la probabilité neutre au risque.

4.2 Évaluation d'une Option Européenne par probabilité risque-neutre

4.2.1 Dynamique du prix actualisé de l'actif risqué sous la probabilité risque neutre

Nous voulons calculer à la date $t = 0$, le prix d'une option d'achat Européenne. On rappelle que

$$C_0 = E^{\widetilde{\mathbb{P}}}\Big[B_T^{-1}\max(S_T - K, 0)\Big|\mathcal{F}_0\Big].$$

Du fait que le processus Y est markovien, nous pouvons écrire :

$$C(0, Y_0) = E^{\widetilde{\mathbb{P}}}\Big[B_T^{-1}\max(S_T - K, 0)\Big|Y_0\Big].$$

$$C(0, Y_0) = E^{\widetilde{\mathbb{P}}}\Big[\exp\Big(-\int_0^T \sum_{j=1}^{2}\langle Y_t, \mathbf{s}_j\rangle r_j dt\Big)\max(S_T - K, 0)\Big|Y_0\Big] \quad (4.2.1)$$

Par la Proposition 3.1.2, nous avions que

$$\frac{d\widetilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\Big|_{\mathcal{F}_t^Y} = \prod_{1\leq i\neq j\leq 2} \exp\left\{ -\int_0^t (\widehat{\theta}_s^{ij} - \theta_s^{ij})ds + \int_0^t \log\left(\frac{\widehat{\theta}_s^{ij}}{\theta_s^{ij}}\right) dN_s^{ij} \right\}. \quad (4.2.2)$$

où

- $N_t^{ij} := \sum_{0<s\leq t} \langle Y_{s^-}, \mathbf{s}_i\rangle\langle Y_s, \mathbf{s}_j\rangle$ le nombre de fois que Y passe de l'état $\mathbf{s}_i$ à l'état $\mathbf{s}_j$ durant l'intervalle de temps $(0,t]$ (dN_t^{ij} désigne sa forme différentielle) ;
- $\theta_t^{ij} := \lambda^{ij}\langle Y_{t^-}, \mathbf{s}_i\rangle\langle Y_t, \mathbf{s}_j\rangle$;
- $\widehat{\theta}_t^{ij} := \widetilde{\lambda}^{ij}\langle Y_{t^-}, \mathbf{s}_i\rangle\langle Y_t, \mathbf{s}_j\rangle$.

Par ailleurs, pour $j \neq k$

$$d\widetilde{M}_t^{jk} = dN_t^{jk} - \langle Y_{t^-}, \mathbf{s}_j\rangle\langle Y_t, \mathbf{s}_k\rangle\widetilde{\lambda}^{jk}dt. \quad (4.2.3)$$

Aussi, de la condition martingale

$$\alpha_j - r_j + (\exp(\beta^{jk}) - 1)\widetilde{\lambda}^{jk} = 0, \quad \forall j,k \in \{1,2\}, \quad (4.2.4)$$

nous obtenons que

$$\widetilde{\lambda}^{jk} = \frac{r_j - \alpha_j}{\exp(\beta^{jk}) - 1} \quad \forall 1 \leq j \neq k \leq 2. \quad (4.2.5)$$

Dans notre modèle, la probabilité risque-neutre $\widetilde{\mathbb{P}}$ est définie (existe) lorsque nous pouvons trouver une solution de la condition martingale. Pour une infinité de choix sur les paramètres du modèle $(\alpha_1, \alpha_2, \beta^{12}, \beta^{21}, r_1, r_2)$, nous pouvons toujours trouver des $(\widetilde{\lambda}^{jk})_{j\neq k}$ tel que $\widetilde{\lambda}^{jk} > 0$. Notre modèle de marché financier est donc incomplet (infinité de mesure martingale).

En introduisant l'expression 3.1.16 dans 4.2.2 nous obtenons l'expression de la densité de Radon-Nikodym qui définit la mesure risque-neutre ou martingale $\widetilde{\mathbb{P}}$:

$$\frac{d\widetilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\Big|_{\mathcal{F}_t^Y} = \prod_{1\le i\neq j\le 2} \exp\Bigg\{ -\int_0^t \Bigg[(\widehat{\theta}_s^{ij} - \theta_s^{ij}) - \widetilde{\lambda}^{ij} \log\Big(\frac{\widehat{\theta}_s^{ij}}{\theta_s^{ij}}\Big)\Bigg] ds + \int_0^t \log\Big(\frac{\widehat{\theta}_s^{ij}}{\theta_s^{ij}}\Big) d\widetilde{M}_s^{ij}\Bigg\}. \quad (4.2.6)$$

La dynamique du prix actualisé de l'actif risqué $\widetilde{S}$ définie par 3.1.19 sous la mesure risque-neutre $\widetilde{\mathbb{P}}$ est donnée par

$$d\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_{t^-}\Big[\sum_{1\le i\neq j\le 2}\Big(\exp(\beta^{ij})-1\Big)\Big\{dN_t^{ij} - \langle Y_{t^-}, \mathbf{s}_i\rangle\langle Y_t, \mathbf{s}_j\rangle \frac{r_i-\alpha_i}{\exp(\beta^{ij})-1}dt\Big\}\Big]. \quad (4.2.7)$$

L'équation (A.4.1) nous permet de construire un schéma d'Euler pour simuler les trajectoires de l'actif risqué $\widetilde{S}$ sous la mesure $\widetilde{\mathbb{P}}$ et par conséquent fournir une approximation numérique du prix de l'option Européenne.

4.2.2 Analyse numérique

Dans cette sous-section, nous mettons en évidence le calcul d'une option d'achat Européenne et tous les paramètres sont choisis de façon à respecter la condition martingale 4.2.4.

Discrétisation

La discrétisation consiste à convertir l'évolution du prix des actifs du temps continu au temps discret. En effet, nous subdivisons l'horizon temporelle $[0;T]$ en H sous-intervalles de temps, c'est à dire, $t_0 = 0 \le t_1 \le \cdot \le t_h \le \cdot \le t_H = T$. Nous abordons premièrement l'approximation de la chaîne de Markov $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{T}}$ (qui est à la base des autres simulations de notre travail) par $\{Y_{t_h}\}_{1\le h\le H}$, ensuite l'approximation du taux d'intérêt par $\{r_{t_h}\}_{1\le h\le H}$, nous avons alors le schéma d'Euler de l'actif risqué actualisé :

$$\begin{cases} \widetilde{S}_0 = 1 \\ \widetilde{S}_{t_h} = \begin{cases} \widetilde{S}_{t_{h-1}} + \widetilde{S}_{t_{h-1}} \sum_{1\leq j\neq k\leq 2} \Big[\Big(\exp(\beta^{jk}) - 1\Big)\Big(N^{jk}_{t_h} - N^{jk}_{t_{h-1}}\Big) \\ \qquad\qquad + \Delta t\Big(r_j - \alpha_j\Big)\Big] \quad \text{si } (Y_{t_{h-1}}, Y_{t_h}) = (j,k) \\ \widetilde{S}_{t_{h-1}} \quad \text{sinon} \end{cases} \end{cases}.$$

Les figures suivantes représentent la trajectoire de l'actif risqué dans plusieurs états du marché sur une unité de temps.

- $r(t) = (r_1(t), r_2(t)) = (0.05, 0.15)$
- $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = (0.1, 0.05)$
- $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t)) = (5, -5)$
- $Y_0 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$
- $K = 100, T = 1$
- $S_0 = 100$
- $P = \begin{pmatrix} 0.45 & 0.55 \\ 0.65 & 0.35 \end{pmatrix}$
- $\widetilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} -3.391817516.10^{-4} & 3.391817516.10^{-4} \\ 0.100678365 & -0.100678365 \end{pmatrix}$

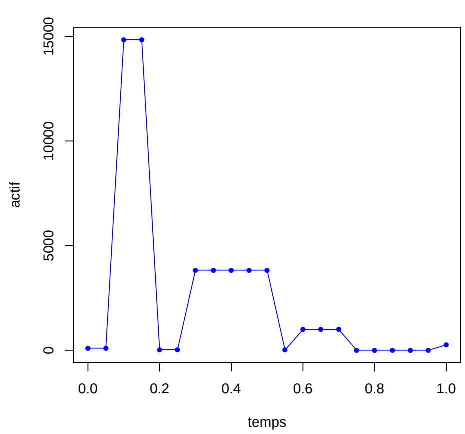

FIGURE 4.1 – $Y_0 = \mathbf{e}_1$

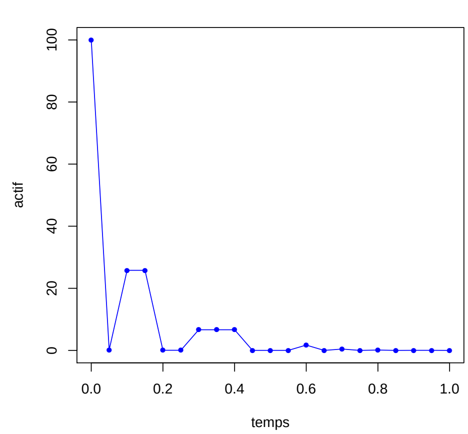

FIGURE 4.2 – $Y_0 = \mathbf{e}_2$

Simulation de Monte Carlo

Nous rappelons que le problème essentiel posé est d'évaluer les prix des options d'achat et de vente souscrites sur l'actif risqué. Puisque notre marché est incomplet il sera question pour nous d'estimer ces prix ou de donner des intervalles de confiance qui nous permettent d'avoir un juste prix.
L'intérêt de la méthode de Monte Carlo est de calculer la valeur espérée de ces prix et d'indiquer des intervalles de confiance que nous pouvons obtenir pour les valeurs numériques (les prix) que nous voulons évaluer. Dans ce paragraphe, nous présentons respectivement comment nous évaluons ces prix et comment nous leurs trouvons des intervalles de confiance.

Pour calculer le prix de l'option, nous allons générer un échantillon de L trajectoires indépendantes $(\widetilde{S}_t^1)_{0\leq t\leq T}, ..., (\widetilde{S}_t^L)_{0\leq t\leq T}$. Pour chacune de ces trajectoires, nous calculons alors le montant $\max(\widetilde{S}_T^l - K, 0)$ des payoff actualisés correspondants et enfin nous faisons la moyenne.

Etape 1

Pour chaque $l = 1, 2, ..., L$, nous simulons la version discrétisée de la chaîne de Markov et nous obtenons $\{Y_{t_h}^{(l)}\}_{1\leq h\leq H}$ et par conséquent les trajectoires des processus de comptage $\{N_{t_h}^{jk} :\ 1 \leq h \leq H\}_{1\leq j\neq k\leq 2}$.

Etape 2

Etant donné $\{Y_{t_h}^{(l)}\}_{1\leq h\leq H}$, nous générons les trajectoires des processus discrétisés suivants : $\{r_{t_h}^{(l)}\}_{1\leq h\leq H}$; $\{\alpha_{t_h}^{(l)}\}_{1\leq h\leq H}$, pour $l = 1, 2, ..., L$.

Etape 3

Nous approximons le prix de l'option d'achat Européenne définie par l'équation (4.2.1) par :

$$C(0; Y_0) \simeq \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L} e^{-\Delta t \sum_{h=0}^{H} r_{t_h}^{(l)}} \max\Big(\widetilde{S}_T^l - K, 0\Big). \tag{4.2.8}$$

et celui du put par :

$$P(0;Y_0) \simeq \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L} e^{-\Delta t \sum_{h=0}^{H} r_{t_h}^{(l)}} \max\Big(K - \widetilde{S}_T^l, 0\Big). \tag{4.2.9}$$

Pour obtenir les intervalles de confiance du call et du put nous utilisons le Théorème de la limite centrale (Chapitre 2, Théorème 2.1.16) qui nous permet d'avoir un intervalle de confiance de niveau α

$$\Big[\overline{C}_i - t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{I}}, \overline{C}_i + t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{I}}\Big] \tag{4.2.10}$$

4.3 Application numérique

Dans cette Section, nous allons calculer les prix des options européennes de notre marché financier en donnant d'abord des estimations des intervalles de confiance.

4.3.1 Calcul des prix des call et du put

Nous allons à présent calculer les prix des call et des put pour les données suivantes :

- $r(t) = (r_1(t), r_2(t)) = (0.05, 0.15)$
- $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = (0.1, 0.05)$
- $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t)) = (5, -5)$
- $Y_0 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$
- $K = 100$
- $S_0 = 100$ et
- $P = \begin{pmatrix} 0.45 & 0.55 \\ 0.65 & 0.35 \end{pmatrix}.$

Prix du call et du put

Nous faisons le calcul du prix du call pour 1000 simulations des trajectoires de l'actif risqué actualisé.

Les figures suivantes représentent les trajectoires du call et du put.

Remarque 4.3.1 *Dans la figure 4.7, la valeur du call est insignifiante (nulle) car le prix de l'actif risqué est extrèmement décroissant. En effet, les investisseurs n'auront aucun intérêt à se procurer un contrat qui va leur permettre d'acheter un actif plus chère que son cours réel.*

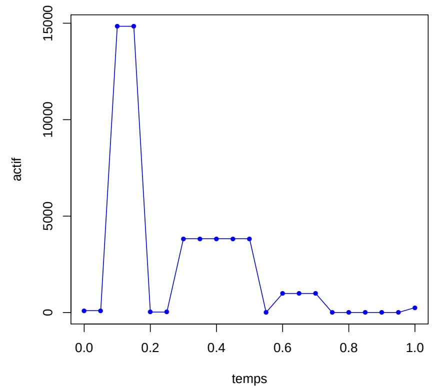

FIGURE 4.3 – actif risqué, $Y_0 = \mathbf{e}_1$

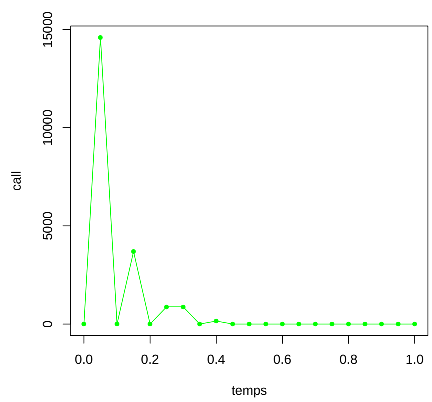

FIGURE 4.4 – call européen $Y_0 = \mathbf{e}_1$

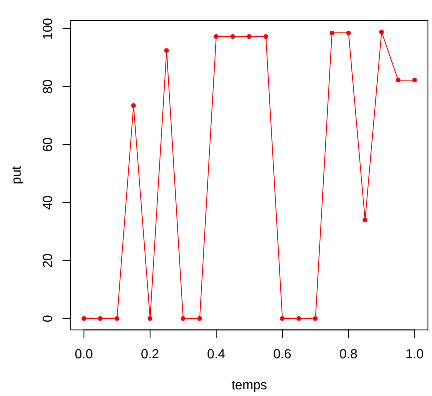

FIGURE 4.5 – put européen $Y_0 = \mathbf{e}_1$

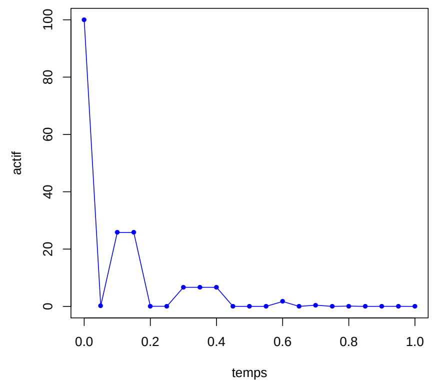

FIGURE 4.6 – actif risqué, $Y_0 = \mathbf{e}_2$

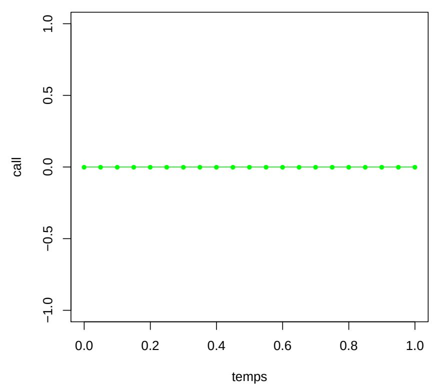

FIGURE 4.7 – call européen, $Y_0 = \mathbf{e}_2$

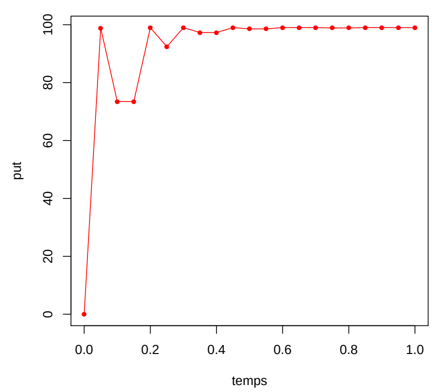

FIGURE 4.8 – put européen, $Y_0 = \mathbf{e}_2$

4.3.2 Détermination des intervalles de confiance

Nous étudierons les intervalles de confiance pour 1000, 5000 et 10.000 simulations des trajectoires des actifs risqués. Pour le faire, nous choisissons (aléatoirement) un échantillon 15 valeurs de l'option, pour cet échantillon, nous calculons la moyenne et la variance à l'aide des formules 2.1.4 et 2.1.5, ensuite nous appliquons la formule 2.1.8 pour $\alpha = 0.05$. Toutes nos procédures numériques sont effectuées avec le Logiciel R. Nous nous donnons de façon arbitraires les données suivantes :

- $r(t) = (r_1(t), r_2(t)) = (0.1, 0.05)$
- $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = (0.05, 0.1)$
- $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t)) = (0.05, -0.05)$
- $Y_0 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$
- $K = 100$
- $S_0 = 100$
- $P = \begin{pmatrix} 0.45 & 0.55 \\ 0.65 & 0.35 \end{pmatrix}$.

L	IC du call	IC du put
1000	[1.865207, 2.416093]	0
5000	[1.938732, 2.513229]	0
10000	[1.919465, 2.404491]	0

TABLE 4.1 – Intervalle de confiance, $Y_0 = \mathbf{e}_1, T = 1$

L	IC du call	IC du put
1000	[0.02912102, 0.0396361]	[2.020428, 2.375304]
5000	[0.02936821, 0.04050486]	[2.043485, 2.62326]
10000	[0.02472953, 0.04283]	[1.991873, 3.627609]

TABLE 4.2 – Intervalle de confiance, $Y_0 = \mathbf{e}_2, T = 1$

4.4 Facteurs influençant la valeur des options

Plusieurs facteurs influencent la valeur d'une option. Dans cette Section, nous étudions l'impact ou la sensibilité de ces facteurs sur les prix du call et du put dans le cadre de notre modèle. L'étude des sensibilités est l'instrument de base de la gestion financière des options. Cette étude est un indicateur de risque pris par celui qui a acheté ou vendu des options, elle permet de retrouver une première approximation de la variation de la valeur de l'option en cas de variations des paramètres suivants :

1. Prix d'évaluation de l'actif risqué
2. Prix d'exercice
3. Volatilité du saut

A chaque fois, pour étudier la sensibilité d'un des trois paramètres ci-dessus, nous supposons que les deux autres sont constants.

Sensibilité du Put et du Call en fonction de la variation du prix d'évaluation de l'actif risqué

Nous supposons que :

- $r(t) = (r_1(t), r_2(t)) = (0.1, 0.05)$
- $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = (0.05, 0.1)$
- $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t)) = (0.05, -0.05)$
- $Y_0 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$
- $K = 200$
- $S_0 = \{100.0, 150.0, 200.0, 250.0, 300.0\}$

$\frac{S_0}{K}$	$C(0; Y_0)$	$P(0; Y_0)$
0.5	0	97.37826
0.75	0	46.04147
1	4.790898	0
1.25	53.2353	0
1.5	105.6533	0

TABLE 4.3 – L=10000,T=1,$Y_0 = \mathbf{e}_1$

$\frac{S_0}{K}$	$C(0; Y_0)$	$P(0; Y_0)$
0.5	0	102.2685
0.75	0	53.81281
1	0.087632249	5.160584
1.25	45.40874	0
1.5	93.53223	0

TABLE 4.4 – L=10000,T=1,$Y_0 = \mathbf{e}_2$

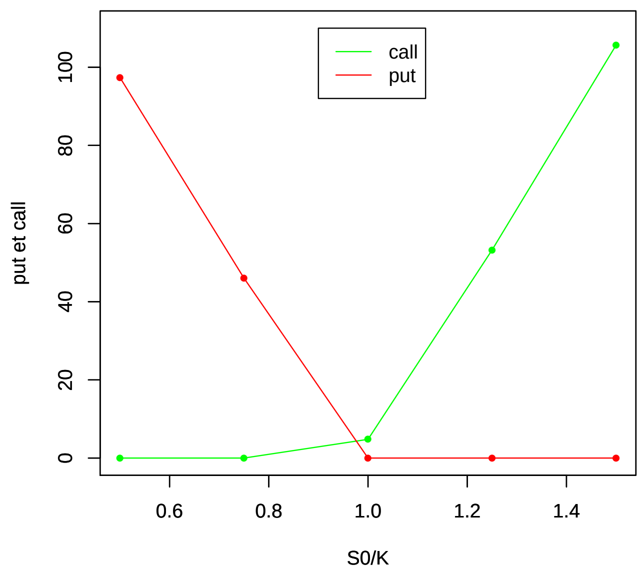

FIGURE 4.9 – $Y_0 = \mathbf{e}_1, T = 1$

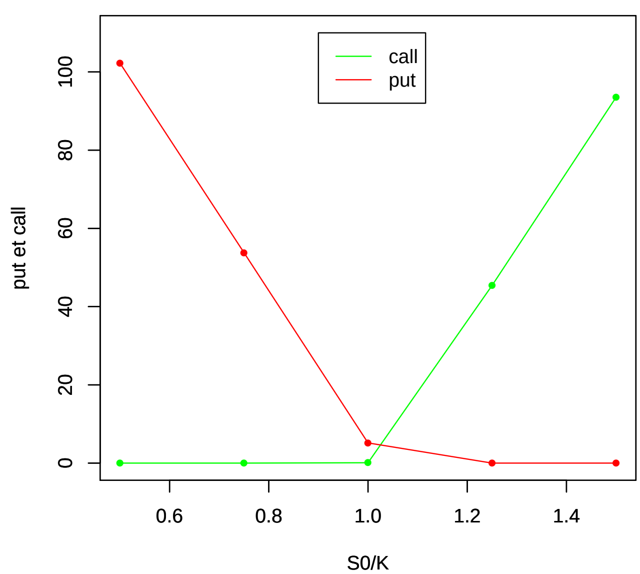

FIGURE 4.10 – $Y_0 = \mathbf{e}_2, T = 1$

Les tableaux précédent nous présentent l'influence du cours d'évaluation du sous-jacent sur les valeurs du call et du put avec un prix d'exercice constant.
Plus précisément, pour un prix d'évaluation du cours de l'actif risqué inférieur au prix d'exercice (l'un des deux cas où $S_0 = 100$ et $S_0 = 150$ et $K = 200$), l'acheteur de l'option n'aura aucun intérêt à acheter le call d'où la valeur insignifiante du prix du call. Pour un prix d'évaluation de l'actif risqué supérieur au prix d'exercice (c-à-d, $S_0 > K$), la demande du call augmente ce qui implique la croissance de son prix. De façon générale, dans notre modèle de marché financier, l'acheteur d'un call échange une perte certaine mais limitée (la prime, i.e, $C(0, Y_0)$) contre un gain aléatoire mais éventuellement illimité quand le cours du sous-jacent augmente. Il spécule donc à la hausse. Pour le vendeur du call les perspectives sont inverses, il doit fixer la prime par rapport à une hausse éventuelle du cours du sous-jacent.
L'acheteur du put échange une perte limitée et certaine (la prime, i.e $P(0, Y_0)$) contre un gain incertain, limité au prix d'exercice, mais nous observons que si le prix du sous-jacent est inférieur au prix d'exercice ($S_0 < K$, le cas où $S_0 = 100$), ce gain peut être important. Il spécule donc à la baisse. Pour le vendeur du put il doit fixer une prime en fonction du risque de la baisse du prix du sous-jacent.

Sensibilité du Put et du Call sur la variation du prix d'exercice

Pour étudier l'influence du prix d'exercice sur les valeurs des options nous supposons que :

- $r(t) = (r_1(t), r_2(t)) = (0.1, 0.05)$
- $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = (0.05, 0.1)$
- $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t)) = (0.05, -0.05)$
- $Y_0 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$
- $S_0 = 20$
- $K = \{100.0, 150.0, 200.0, 250.0, 300.0\}$

$\frac{K}{S_0}$	$C(0;Y_0)$	$P(0;Y_0)$
0.5	103.0935	0
0.75	51.99198	0
1	4.718358	0
1.25	0	44.45373
1.5	0	95.5035

TABLE 4.5 – L=10000,T=1,$Y_0 = \mathbf{e}_1$

$\frac{K}{S_0}$	$C(0;Y_0)$	$P(0;Y_0)$
0.5	94.57186	0
0.75	44.05884	0
1	0.06456320	5.138568
1.25	0	55.23555
1.5	0	104.3735

TABLE 4.6 – L=10000,T=1,$Y_0 = \mathbf{e}_2$

Les tableaux ci-dessus illustrent l'influence du prix d'exercice (K). En général, plus ce dernier est élevé, plus le call est bon marché (moins chère) et plus le prix du put est élevé. En effet, en cas d'exercice, K sera payé par l'investisseur qui possède le call (par conséquent il souhaiterai payer la plus petite somme possible) et sera encaissé par le détenteur du put. Graphiquement, nous obtenons les figures suivantes :

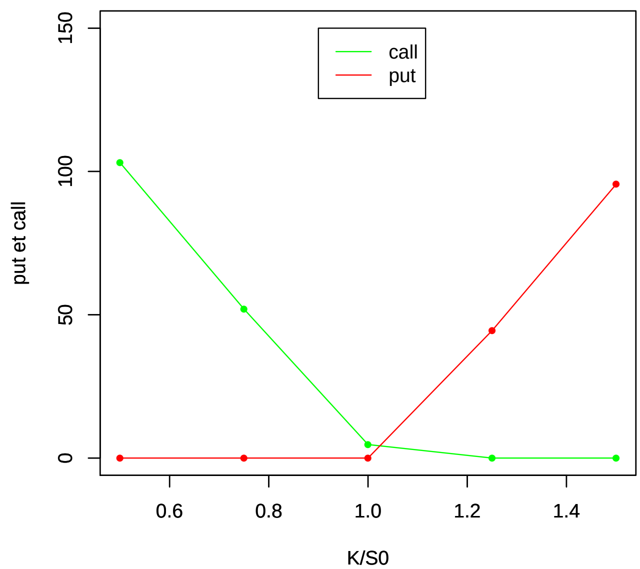

FIGURE 4.11 – $Y_0 = \mathbf{e}_1, T = 1$

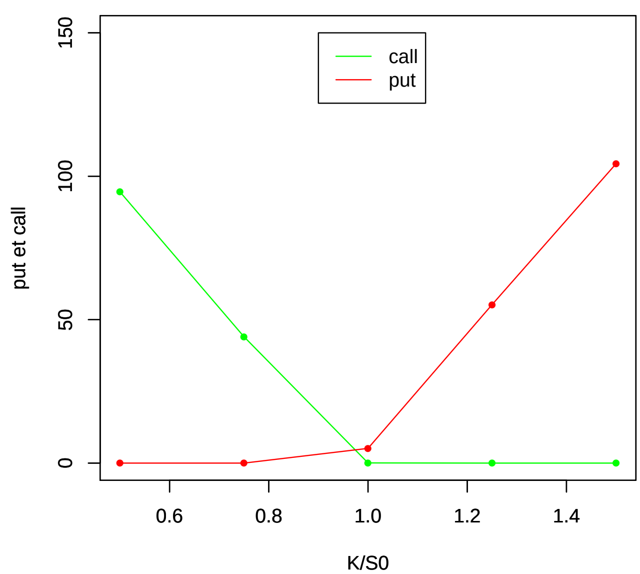

FIGURE 4.12 – $Y_0 = \mathbf{e}_2, T = 1$

Sensibilité du Put et du Call en fonction de la variation de la volatilité du saut

L'idée présentée dans ce paragraphe consiste à choisir des valeurs différentes des β^{jk}. Pour ce faire, nous allons nous appuyer sur la condition martingale 4.2.4 en respectant le fait que $\widetilde{\lambda}^{jk} > 0 \quad (j \neq k), \quad \forall j, k \in \{1, 2\}$. Nous supposons que dans l'état $\mathbf{e}_1$, la banque centrale veut relancer la croissance économique et par conséquent, elle décide appliquer sur le marché financier un taux d'intérêt faible. L'état $\mathbf{e}_2$, la banque centrale veut limiter le niveau d'inflation et décide alors appliquer sur le marché financier un fort taux d'intérêt. Nous considérons alors les paramètres suivants :

- $r(t) = (r_1(t), r_2(t)) = (0.025, 0.35)$
- $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = (0.1, 0.05)$
- $\beta_1(t) \in \{1, 2\}, \beta_2(t) \in \{-1, -3\}$
- $Y_0 = \mathbf{e}_1, T = 1$
- $S_0 = 100$
- $K = 100, L = 10000, T = 1$
- $\widetilde{\Lambda}_1 = \begin{pmatrix} -0.043648253 & 0.043648253 \\ 0.237296506 & -0.237296506 \end{pmatrix}, \widetilde{\Lambda}_2 = \begin{pmatrix} -0.011738823 & 0.011738823 \\ 0.157859354 & -0.157859354 \end{pmatrix}$

Nous l'illustrons par les figures ci-dessous.

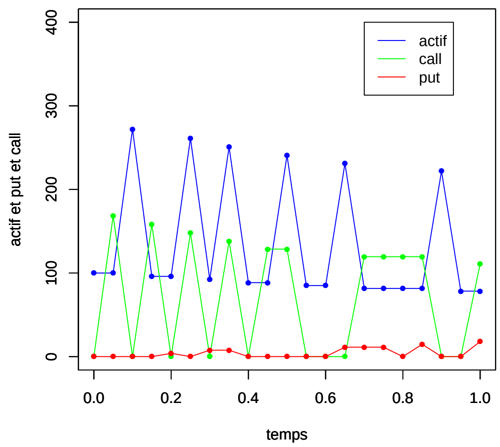

FIGURE 4.13 – $\beta^{12} = 1, \beta^{21} = -1, Y_0 = \mathbf{e}_1$

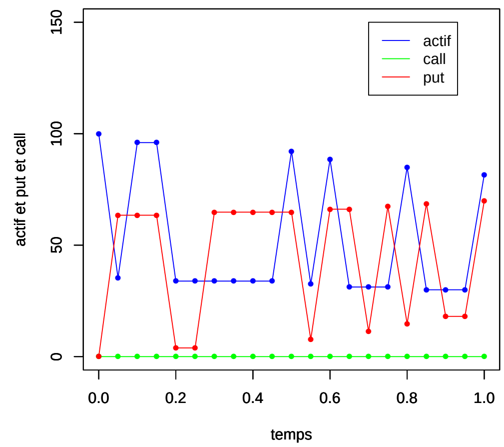

FIGURE 4.14 – $\beta^{12} = 1, \beta^{21} = -1, Y_0 = \mathbf{e}_2$

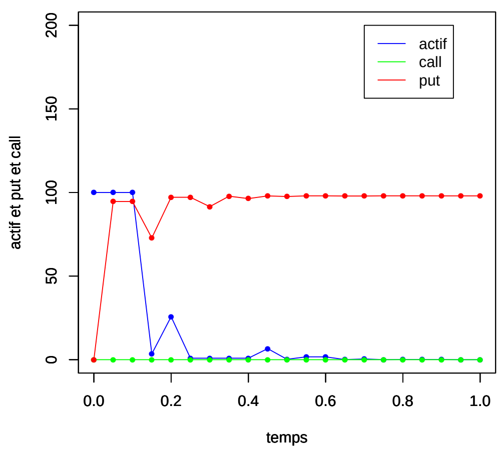

FIGURE 4.15 – $\beta^{12} = 2, \beta^{21} = -3, Y_0 = \mathbf{e}_2$

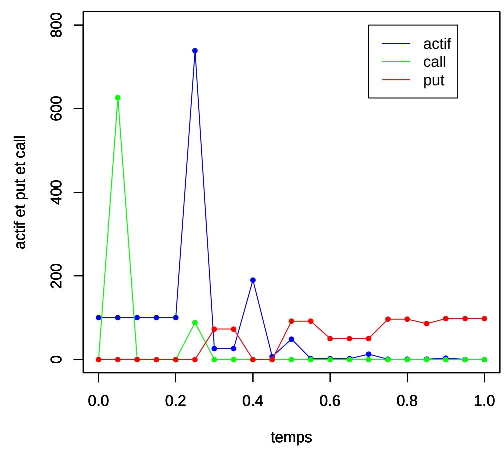

FIGURE 4.16 – $\beta^{12} = 2, \beta^{21} = -3, Y_0 = \mathbf{e}_1$

Dans les figures ($Y_0 = \mathbf{e}_2$) 4.14 et 4.15, la hausse du taux d'intérêt va entraîner les entreprises à ralentir leurs investissements, correspondant ainsi à une diminution de la demande des capitaux de leur part sur le marché financier, traduisant une baisse des prix des actifs risqués qui va entraîner une baisse de la valeur du call et une hausse de la valeur du put.
Dans la figure ($Y_0 = \mathbf{e}_1$) 4.13, une baisse du taux d'intérêt incite les entreprises à augmenter leurs investissements correspondant ainsi à une hausse de la demande des capitaux, se traduisant par une hausse du prix des actifs risqués entraînant une surenchère des calls et une baisse des puts.

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous traitons principalement de l'évaluation d'une option européenne souscrite sur un sous-jacent dont le cours est discontinu. Pour ce faire, nous considérons un marché financier dirigé par une chaîne de Markov (un marché financier markovien) tel que décrit par Norberg [16] et nous mettons en évidence, dans ce contexte, le calcul du prix de l'option européenne par la probabilité risque neutre en ressortant la condition martingale et par la réplication en déterminant les quantités d'actifs risqués et non risqués.
Notre Contribution a d'abord consisté à déterminer une mesure de probabilité neutre risque par sa densité de Random Nykodym. Ce modèle de marché financier est incomplet parceque la probabilité obtenue a plusieurs paramètres. La deuxième étape a consité à appliquer la méthode de Monte Carlo pour une résolution numérique du prix des options lorsque le marché Markovien a deux état. La troisième étape a consité à faire une étude de la sensibilité du put et du call par rapport à trois paramètres de ces options.
Compte tenu de l'importance pour les investisseurs de se couvrir du risque lié à la détention de l'option européenne, les recherches futures pourront explorer la couverture de ce risque.

Annexe A

Annexes

A.1 Tableau synoptique de la finance

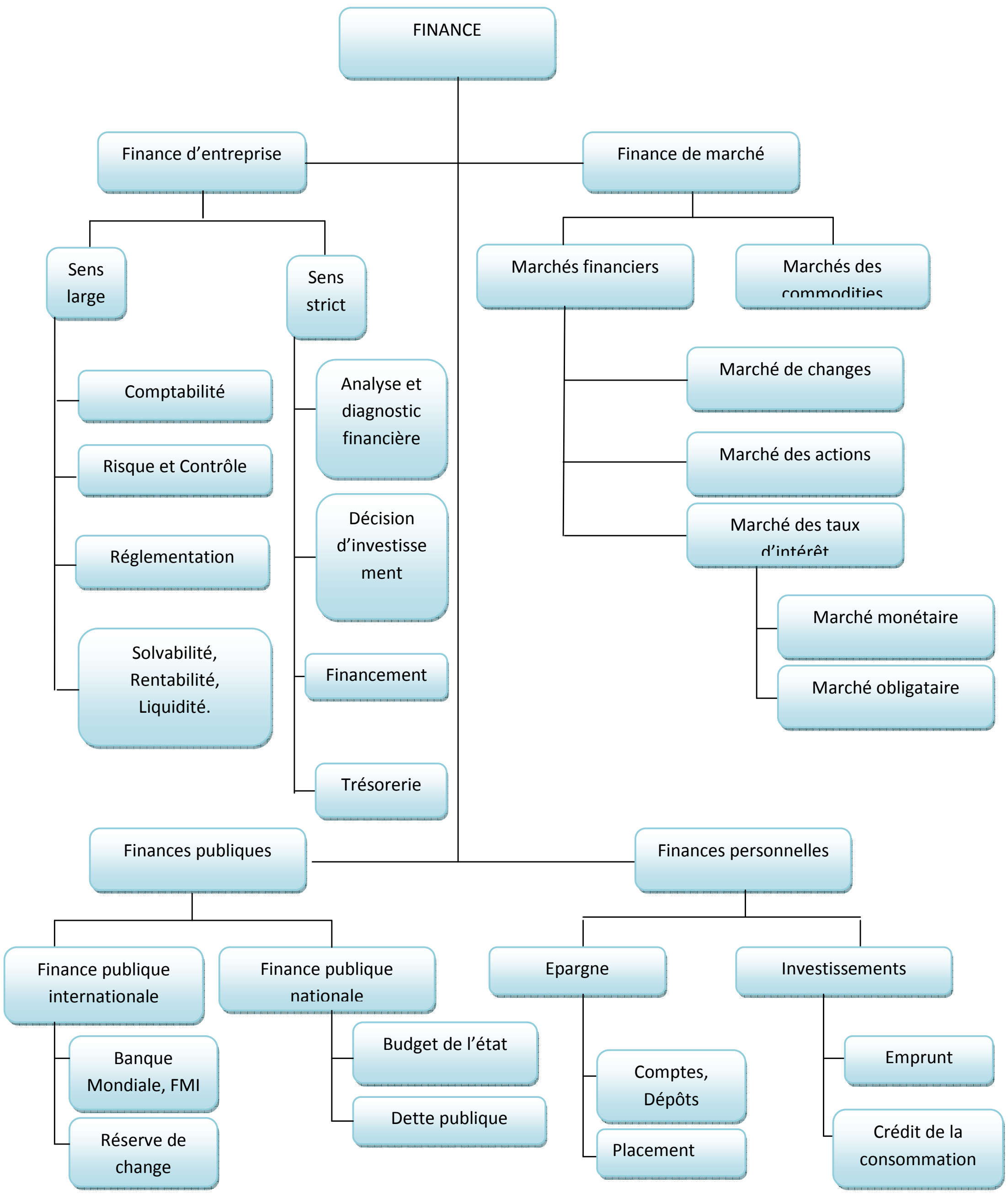
FINANCE
Finance d'entreprise
Finance de marché
Sens large
Sens strict
Marchés financiers
Marchés des commodities
Comptabilité
Risque et Contrôle
Réglementation
Solvabilité, Rentabilité, Liquidité.
Analyse et diagnostic financière
Décision d'investisse ment
Financement
Trésorerie
Marché de changes
Marché des actions
Marché des taux d'intérêt
Marché monétaire
Marché obligataire
Finances publiques
Finances personnelles
Finance publique internationale
Finance publique nationale
Banque Mondiale, FMI
Réserve de change
Budget de l'état
Dette publique
Epargne
Investissements
Comptes, Dépôts
Placement
Emprunt
Crédit de la consommation

Figure A.1 –

A.2 Calcul S_t à l'aide de la formule d'Itô

A.2.1 Rappels

- Formule d'Itô : Soit X un processus stochastique dont la dynamique est décrite par :

$$dX_t = \mu_t dt + h_t dN_t$$

où μ et h sont prévisibles et $(N_t)_t$ un processus de Poisson.

Soit F une fonction de classe $C^{1,2}$

Alors la formule d'Itô est :

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_{s^-})dX_s + \sum_{0<s\leq t} \Big[F(X_s) - F(X_{s^-}) - \Delta X F'(X_{s^-})\Big] \tag{A.2.1}$$

- Dynamique du prix de l'actif risqué

$$dS_t = S_{t^-}\Big[\sum_j \alpha_j \langle s_j, Y_t\rangle dt + \sum_{j\in\mathbb{E}} \sum_{k\in\mathcal{Y}^j} (\exp(\beta^{jk}) - 1)dN_t^{jk}\Big] \tag{A.2.2}$$

A.2.2 Calcul du prix de l'actif risqué

Posons $F(S_t) = \ln S_t$, alors nous déduisons que :

$$\begin{cases} F(S_0) = \ln S_0 \\ F'(S_{s^-})dS_s = \frac{1}{S_{s^-}} S_{s^-}\Big[\sum_j \alpha_j \langle s_j, Y_t\rangle ds + \sum_{j\in\mathbb{E}} \sum_{k\in\mathcal{Y}^j} (\exp(\beta^{jk}) - 1)dN_s^{jk}\Big] \end{cases}$$

De plus

$$
\begin{aligned}
\sum_{0<s\leq t}\Big[F(S_s)-F(S_{s^-})-\Delta S_s F'(S_{s^-})\Big] &= \sum_{0<s\leq t}\Big[\ln S_s-\ln S_{s^-}\Delta S_s\frac{1}{S_{s^-}}\Big]\\
&= \sum_{0<s\leq t}\Big[\ln\Big(\frac{S_{s^-}-\Delta S_s}{S_{s^-}}\Big)-\frac{\Delta S_s}{S_{s^-}}\Big]\\
&= \sum_{0<s\leq t}\Big[\ln\Big(1+\frac{\Delta S_s}{S_{s^-}}\Big)-\frac{\Delta S_s}{S_{s^-}}\Big]
\end{aligned}
$$

Pour le terme du saut nous avons
$\frac{\Delta S_s}{S_{s^-}} = S_{s^-}\sum_{j\in\mathbb{E}}\sum_{k\in\mathcal{Y}^j}(\exp(\beta^{jk})-1)N_s^{jk}$
Il n'arrive à un instant s qu'un seul saut et pour ce j,k $N_s^{jk}=1$ et les autres sont nuls ; donc $\sum_{j\in\mathbb{E}}\sum_{k\in\mathcal{Y}^j}(\exp(\beta^{jk})-1)N_s^{jk} = \exp(\beta^{jk})-1$
Par conséquent A.2.3 devient :

$$
\begin{aligned}
\sum_{0<s\leq t}\Big[\ln\Big(1+\frac{\Delta S_s}{S_{s^-}}\Big)-\frac{\Delta S_s}{S_{s^-}}\Big] &= \sum_{0<s\leq t}\Big[\ln\Big(1+\exp(\beta^{jk})-1\Big)-\Big(\exp(\beta^{jk})-1\Big)\Big]\\
&= \sum_{0<s\leq t}\Big[\sum_{j\in\mathbb{E}}\sum_{k\in\mathcal{Y}^j}\Big\{\ln\Big(1+\exp(\beta^{jk})-1\Big)\\
&- \Big(\exp(\beta^{jk})-1\Big)\Big\}N_s^{jk}\Big]\\
&= \sum_{0<s\leq t}\Big[\sum_{j\in\mathbb{E}}\sum_{k\in\mathcal{Y}^j}\Big\{\beta^{jk}-\Big(\exp(\beta^{jk})-1\Big)\Big\}N_s^{jk}\Big]\\
&= \int_0^t\sum_{j\in\mathbb{E}}\sum_{k\in\mathcal{Y}^j}\Big\{\beta^{jk}-\Big(\exp(\beta^{jk})-1\Big)\Big\}dN_s^{jk}\Big]\\
&= \int_0^t\sum_{j\in\mathbb{E}}\sum_{k\in\mathcal{Y}^j}\beta^{jk}dN_s^{jk}-\int_0^t\sum_{j\in\mathbb{E}}\sum_{k\in\mathcal{Y}^j}\Big(\exp(\beta^{jk})-1\Big)dN_s^{jk}
\end{aligned}
$$

Finalement

$$
\begin{aligned}
\ln S_t &= \ln S_0 + \int_0^t \sum_j \alpha_j \langle s_j, Y_t \rangle ds + \int_0^t \sum_{j \in \mathbb{E}} \sum_{k \in \mathcal{Y}^j} \beta^{jk} dN_s^{jk} \\
&- \int_0^t \sum_{j \in \mathbb{E}} \sum_{k \in \mathcal{Y}^j} \Big(\exp(\beta^{jk}) - 1 \Big) dN_s^{jk} \\
&+ \int_0^t \sum_{j \in \mathbb{E}} \sum_{k \in \mathcal{Y}^j} \Big(\exp(\beta^{jk}) - 1 \Big) dN_s^{jk} \\
&= \ln S_0 + \int_0^t \sum_j \alpha_j \langle s_j, Y_t \rangle ds + \int_0^t \sum_{j \in \mathbb{E}} \sum_{k \in \mathcal{Y}^j} \beta^{jk} dN_s^{jk}
\end{aligned}
$$

Nous avons alors le résultat suivant :

$$
S_t = S_0 \exp \Big[\int_0^t \sum_j \alpha_j \langle s_j, Y_t \rangle ds + \int_0^t \sum_{j \in \mathbb{E}} \sum_{k \in \mathcal{Y}^j} \beta^{jk} dN_s^{jk} \Big] \tag{A.2.3}
$$

A.3 Calcul $\widetilde{\pi}_t$ à l'aide de la formule d'Ito

A.3.1 Rappels

- Formule d'Ito : Soit X un processus stochastique dont la dynamique est décrite par :

$$dX_t = \mu_t dt + h_t dN_t$$

où μ et h sont prévisibles et $(N_t)_t$ un processus de Poisson.

Soit F une fonction de classe $C^{1,2}$ et $Z_t = F(t, X_t)$.

Alors la formule d'Itô est :

$$dZ_t = \Big\{\frac{\partial F}{\partial t}(t, X_t) + \mu_t \frac{\partial F}{\partial x}(t, X_t)\Big\} dt + \{F(t, X_{t_-} + h_t) - F(t, X_{t_-})\} dN_t \tag{A.3.1}$$

- Dynamique du prix de l'actif risqué

$$dS_t = S_{t^-}\Big[\sum_j \alpha_j \langle s_j, Y_t\rangle dt + \sum_{j\in\mathbb{E}} \sum_{k\in\mathcal{Y}^j} (\exp(\beta^{jk}) - 1) dN_t^{jk}\Big] \tag{A.3.2}$$

Ainsi nous déduisons $\begin{cases} \mu_t = S_{t^-}\Big[\sum_j \alpha_j \langle s_j, Y_t\rangle\Big] \\ h_t = S_{t^-}\Big[\sum_{j\in\mathbb{E}} \sum_{k\in\mathcal{Y}^j} (\exp(\beta^{jk}) - 1)\Big] \end{cases}$

- Martingales et sous-martingales :

$$\widetilde{M}_t^{jk} = N_t^{jk} - \widetilde{\lambda}^{jk} t$$

- Expression de $\widetilde{\pi}_t$

$$\widetilde{\pi}_t = exp(-\int_0^t r_s ds)\sum_j^n \langle Y_t, s_j\rangle f^j(t, S_t)$$

Ainsi $\widetilde{\pi}_t = F(t, S_t)$ où $F(t,x) = exp(-\int_0^t r_s ds)\sum_j^n \langle Y_t, s_j\rangle f^j(t,x)$

A.3.2 Application

$\frac{\partial F}{\partial t} = \exp\Big(-\int_0^t r_s ds\Big)\sum_j^n \langle Y_t, s_j\rangle\Big[-r_t f^j(t,x) + \frac{\partial}{\partial t}f^j(t,x)\Big]$

$\frac{\partial F}{\partial x} = \exp\Big(-\int_0^t r_s ds\Big)\sum_j^n \langle Y_t, s_j\rangle \frac{\partial}{\partial x}f^j(t,x)$

$\frac{\partial F}{\partial x} = \exp\Big(-\int_0^t r_s ds\Big)\sum_j^n \langle Y_t, s_j\rangle \frac{\partial}{\partial x}f^j(t,x)$

$\mu_t \frac{\partial F}{\partial x}(t, X_t) = \exp\Big(-\int_0^t r_s ds\Big)\sum_j^n \langle Y_t, s_j\rangle\Big(\frac{\partial}{\partial x}f^j(t,x)x_{t^-}\alpha_t\Big)$

$F(t, X_{t_-}+h_t)-F(t, X_{t_-}) = \exp\Big(-\int_0^t r_s ds\Big)\sum_j^n \langle Y_t, s_j\rangle\Big(f^j(t, X_{t^-}\sum_{j=1}^n\sum_{k\in\mathcal{Y}^j}(\exp(\beta^{jk})-1)) - f^j(t, X_{t^-})\Big)$

$$
\begin{aligned}
d\widetilde{\pi}_t &= \exp\Big(-\int_0^t r_s ds\Big)\sum_j^n \langle Y_t, s_j\rangle\Big[\Big(-r_t f^j(t,S_t)+\frac{\partial}{\partial t}f^j(t,S_t)+\frac{\partial}{\partial S}f^j(t,S_t)S_{t^-}\alpha_t\Big)dt \\
&+ \Big(f^j(t,S_{t^-}\sum_{j=1}^n\sum_{k\in\mathcal{Y}^j}(\exp(\beta^{jk})-1))-f^j(t,S_{t^-})\Big)dN_t^{jk}\Big] \\
&= \exp\Big(-\int_0^t r_s ds\Big)\sum_j^n \langle Y_t, s_j\rangle\Big[\Big(-r_t f^j(t,S_t)+\frac{\partial}{\partial t}f^j(t,S_t)+\frac{\partial}{\partial S}f^j(t,S_t)S_{t^-}\alpha_t \\
&+ \Big\{f^j(t,S_{t^-}\sum_j^n\sum_{k\in\mathcal{Y}^j}(\exp(\beta^{jk})-1))-f^j(t,S_{t^-})\Big\}\widetilde{\lambda}^{jk}\Big)dt \\
&+ \Big(f^j(t,S_{t^-}\sum_j^n\sum_{k\in\mathcal{Y}^j}(\exp(\beta^{jk})-1))-f^j(t,S_{t^-})\Big)d\widetilde{M}_t^{jk}\Big] \qquad \text{(A.3.3)}
\end{aligned}
$$

A.4 Discrétisation du prix de l'actif risqué

Nous rappelons que la dynamique du prix de l'actif risqué est donnée par :

$$d\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_{t^-}\Big[\sum_{1\leq i\neq j\leq 2}\Big(\exp(\beta^{ij})-1\Big)\Big\{dN_t^{ij} - \langle Y_{t^-},\mathbf{s}_i\rangle\langle Y_t,\mathbf{s}_j\rangle\frac{r_i-\alpha_i}{\exp(\beta^{ij})-1}dt\Big\}\Big]. \tag{A.4.1}$$

Nous rappelons également que la discrétisation consiste à convertir l'évolution du prix des actifs du temps continu au temps discret. En effet, nous subdivisons l'horizon temporelle $[0;T]$ en H sous-intervalles de temps, c'est à dire, $t_0 = 0 \leq t_1 \leq \cdot \leq t_h \leq \cdot \leq t_H = T$. Nous procédons alors de la manière suivante :

- $d\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_{t_h} - \widetilde{S}_{t_{h-1}}$
- $dN_t^{ij} = N_{t_h}^{ij} - N_{t_{h-1}}^{ij}$

$$\begin{aligned}
\widetilde{S}_{t_h} - \widetilde{S}_{t_{h-1}} &= \widetilde{S}_{t_{h-1}}\sum_{1\leq i\neq j\leq 2}\Big[\Big(\exp(\beta^{ij})-1\Big)\Big\{\Big(N_{t_h}^{ij} - N_{t_{h-1}}^{ij}\Big) \\
&- \langle Y_{t_{h-1}},\mathbf{s}_i\rangle\langle Y_{t_{h-1}},\mathbf{s}_j\rangle\frac{r_i-\alpha_i}{\exp(\beta^{ij})-1}\Delta t\Big\}\Big] \\
&= \widetilde{S}_{t_{h-1}}\sum_{1\leq i\neq j\leq 2}\Big[\Big(\exp(\beta^{ij})-1\Big)\Big(N_{t_h}^{ij} - N_{t_{h-1}}^{ij}\Big) \\
&- \langle Y_{t_{h-1}},\mathbf{s}_i\rangle\langle Y_{t_{h-1}},\mathbf{s}_j\rangle\Big(\exp(\beta^{ij})-1\Big)\frac{r_i-\alpha_i}{\exp(\beta^{ij})-1}\Delta t\Big] \\
&= \widetilde{S}_{t_{h-1}}\sum_{1\leq i\neq j\leq 2}\Big[\Big(\exp(\beta^{ij})-1\Big)\Big(N_{t_h}^{ij} - N_{t_{h-1}}^{ij}\Big) \\
&- \langle Y_{t_{h-1}},\mathbf{s}_i\rangle\langle Y_{t_{h-1}},\mathbf{s}_j\rangle\Big(r_i-\alpha_i\Big)\Delta t\Big]
\end{aligned} \tag{A.4.2}$$

Nous avons alors :

$$\widetilde{S}_{t_h} = \begin{cases} \widetilde{S}_{t_{h-1}} + \widetilde{S}_{t_{h-1}} \sum_{1\leq j\neq k\leq 2} \Big[\Big(\exp(\beta^{jk}) - 1 \Big) \Big(N^{jk}_{t_h} - N^{jk}_{t_{h-1}} \Big) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \Delta t \Big(r_j - \alpha_j \Big) \Big] \quad \text{si } (Y_{t_{h-1}}, Y_{t_h}) = (j,k) \\ \widetilde{S}_{t_{h-1}} \quad \text{sinon} \end{cases}$$

Finalement la forme discrétisée de la dynamique du prix de l'actif risqué est :

$$\begin{cases} \widetilde{S}_0 = 1 \\ \widetilde{S}_{t_h} = \begin{cases} \widetilde{S}_{t_{h-1}} + \widetilde{S}_{t_{h-1}} \sum_{1\leq j\neq k\leq 2} \Big[\Big(\exp(\beta^{jk}) - 1 \Big) \Big(N^{jk}_{t_h} - N^{jk}_{t_{h-1}} \Big) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \Delta t \Big(r_j - \alpha_j \Big) \Big] \quad \text{si } (Y_{t_{h-1}}, Y_{t_h}) = (j,k) \\ \widetilde{S}_{t_{h-1}} \quad \text{sinon} \end{cases} \end{cases} .$$

A.5 Code des simulations

```
#code de la chaine de Markov
ChMarkov<-function(X0,n,E,P){
 cm<-numeric(n+1) #
 cm[1]<-X0  #à l'instant initial j'affecte l'état initial
 etat<-which(E==X0)
 for(i in 1:n){
 cm[i+1]<-sample(E,1,prob=P[etat,]) # à un instant
je donne un état avec la probabilité de cette état
 etat<-which(E==cm[i+1])}
 return(ts(cm)) #à chaque fois il donne le résultat
 } #fin du code
#exemple d'application
 P<-matrix(c(0.45,0.65,0.55,0.35),2,2)
 X<-ChMarkov(1,50,1:2,P)
 plot(X,type="s",xlab="temps",ylab="état de la
chaine")
```

Figure A.2 – code de la chaîne de Markov

```
# code de la courbe de l'actif risqué

courbeactif<-function(S0,X0,E,n,h,B1,r1,alpha1,B2,r2,alpha2,Q){

 X<-ChMarkov(X0,n,E,Q) #l'actif dépend de la chaine, j'initialise la
chaine

  S<-numeric(n+1)

  S[1]<-S0 # affectation de la valeur initiale de l'actif

  for(i in 1:n){

  if(X[i]==X[i+1]){ S[i+1]<-S[i]}

  else{

      if(X[i]==1 & X[i+1]==2){

      S[i+1]<-S[i]+S[i]*(exp(B1)-1-h*(r1-alpha1))}

      else{

      S[i+1]<-S[i]+S[i]*(exp(B2)-1-h*(r2-alpha2))}}}

  return(ts(S,deltat=h,start=0))} #fin du code

# example  d'application

Q<-matrix(c(0.45,0.65,0.55,0.35),2,2)

p<-courbeactif(100,1,c(1,2),20,0.05,2,0.1,0.05, B2=-2,0.05,0.1,Q)

plot(p)
```


Figure A.3 – code de l'actif risqué

```
#code pour le calcul du call
T<-1
r1<-0.1
r2<-0.05
h<-T/20
K<-100
S0<-100
Q<-matrix(c(0.45,0.65,0.55,0.35),2,2)
n<-20
nsim<-1000  # simulations
C0<-numeric(nsim)
for(i in 1:nsim){
S<-courbeactif(S0,X0=1,E=c(1,2),n=20,h,B1=2,r1,alpha1=0.05,
B2=-2,r2,alpha2=0.1,Q)
C0[i]<-S[length(S)]}
C0<-exp(h*(-r1-r2))*pmax(S-K,0)
mean(C0)
```


Figure A.4 – code du call

```
# code pour le calcul du put
T<-1
r1<-0.1
r2<-0.05
h<-T/20
K<-100
S0<-100
Q<-matrix(c(0.45,0.65,0.55,0.35),2,2)
n<-20
nsim<-1000
P0<-numeric(nsim)
for(i in 1:nsim){
S<-courbeactif(S0,X0=1,E=c(1,2),n=20,h,B1=2,r1,alpha1=0.05,
B2=-2,r2,alpha2=0.1,Q)
P0[i]<-S[length(S)]}
P0<-exp(h*(-r1-r2))*pmax(-S+K,0)
mean(P0)
```


Figure A.5 – code du put

Bibliographie

[1] Bernier B. et Simon Y., *Initiation à la macroéconomie*, 8^{ime} édition, Dunod, Paris.

[2] Breton J.C. (2012), *Calcul Stochastique*, Université de Rennes.

[3] Brémaud P. (1981), *Point processes and Queues : Martingale Dynamics*, Springer-Verlag.

[4] Dadpunar J.S.(2007), *Simulation and Monte Carlo with application in finance and MCMC*, John Wiley and Sons.

[5] Dufour F. and Elliot.R.J. (1999). Filtering with Discrete State Observations. *Applied Mathematics and Optimization* 40, 269-272.

[6] Eberle A. (2012),*Stochastic Analysis*, University of Bonn.

[7] El Karoui N.(2003-2004), *Couverture des risques dans les marchés financiers*, CMAP.

[8] Elliot R.J. (1993). New Finite-Dimensional Filters and Smoothers for Noisily Observed Markov Chains. *IEEE Transactions on Informations theory* 39-1, 265-271.

[9] Hull J.C., Fith edition, *Options, Futures and Other Derivatives*, Prentice Hall.

[10] Jeanblanc M., Yor M., Chenes M.(2009), *Mathematical Methods for Financial Markets*, Springer-Verlag.

[11] Kulkarni V.G.(2011), *Introduction to Modeling and Analysis of stochastic systems* , second edition, Springer.

[12] Lamberton D. et Lapeyre B.(1997), *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, Ellipses.

[13] Lucas S. M.(2011), *Option Pricing and Estimation of Financial Models with R*, John Wiley and Sons.

[14] Merton R. (1969). Lifetime Portofolio Selection under Uncertaintly : The Continuous-Time Case. *The Review of Economics and Statistics* pp 247-257.

[15] Momeya R. and Morales M. (2010). On the Price of the Underlying Markov Chain in a Regime-Switchning-Exponential Lévy Model. *Working Paper CRM* 3303, 37p.

[16] Norberg R.(2003). A Markov Chain Financial Market. *Astin Bulletin*, vol. 33-2, pp 265-287.

[17] Norris J.R.(1998), *Markov Chains*, Cambridge university press (108-128).

[18] Pham H.(2006-2007), *Introduction aux mathématiques et modèles stochastiques des modèles financiers*, Université de Paris 7.

[19] Tomas Björk (2011), *An Introduction to point processes from Martingale point of view*, KTH.