

UNIVERSITÉ DE DOUALA

ECOLE DOCTORALE DE SCIENCES FONDAMENTALES ET APPLIQUÉES
UNITÉ DE FORMATION DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES, INFORMATIQUE
APPLIQUÉE ET PHYSIQUE FONDAMENTALE
LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Master II

**Les équations aux dérivées partielles et intégral-différentielles en finance
mathématique : Etude de quelques modèles**

Présenté par : Floriane FONDOP

Sous la direction de :

Pr. Louis-Aimé FONONO, Maître de Conférences, directeur de mémoire

Dédicace

Je dédie ce mémoire à mon papa et ma maman

Mr et Mme

Maurice et Bernadette, FONDOP.

Remerciements

Je remercie le Seigneur mon Dieu pour sa protection tout au long de ces années et Marie ma mère.

Je remercie le Professeur Louis-Aimé FONON pour sa disponibilité, sa patience et ses encouragements.

Je remercie le Dr Romuald Hervé MOMEYA pour sa disponibilité et toute la documentation qu'il m'a fourni.

Je remercie le Professeur Bernard LAPEYRE pour la documentation et le Dr Antoine TAMBUE pour sa disponibilité et ses encouragements.

Je tiens à remercier tous les enseignants du Département de Mathématique et Informatique de la Faculté des Sciences pour la formation reçue durant ces années.

Merci à ma famille, mes soeurs Aimerance, Guilène et Lauretta et mon grand frère Wilfried qui m'ont toujours encouragé et soutenu sans oublier Peguy qui m'a toujours réconforté.

Je n'oublie pas mes camarades de Master II pour les moments chaleureux passés ensemble.

Table des sigles

E.D.P. équation au dérivée partielle.

E.I.D. équation intégro différentielle.

i.i.d. indépendant identiquement distribué.

Résumé

Le problème d'évaluation des options peut être formulé comme un problème d'E.D.P. ou E.I.D. avec une condition initiale et des conditions aux frontières dépendant du type de l'option. Lorsque l'actif sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique (modèle de Black et Scholes), l'équation d'évaluation se réduit à une E.D.P. et lorsque l'actif sous-jacent évolue suivant un processus saut-diffusion (modèle de Merton), l'équation d'évaluation est une E.I.D. Le but de ce travail est d'évaluer numériquement par la méthode des différences finies une option Européenne dans le modèle de Black et Scholes et celui de Merton.

Mots clés : Modèle de Black et Scholes ; Modèle de Merton ; Option Européenne ; Méthode des différences finies.

Abstract

The option pricing problem can be formulated as a problem P.D.E. or P.I.D.E. with an initial condition and boundary conditions depending on the type option. When the underlying asset follows a geometric Brownian motion (Black-Scholes model), evaluation equation is reduced to an P.D.E. and when the asset underlying changes according to a jump-diffusion process (Merton model), equation evaluation is a P.I.D.E. The aim of this study was to evaluate numerically by the finite difference method a European option in the Black-Scholes model and Merton model.

Key words : Black-Scholes model ; Merton model ; European option ; Finite difference method.

Table des figures

2.1	Etude de la stabilité lorsque le nombre de pas de discretisation en temps est 20 pour $S_{max} = 100, T = 1, \sigma = 0.15$ et $r = 0.05$	23
2.2	Prix d'une option d'achat européenne en fonction du temps et du prix du sous jacent à tout instant pour $S_{max} = 200, K = 120, \sigma = 0.15, r = 0.05, N = 300, M = 200$ et $T = 1$	25
2.3	Prix d'une option d'achat européenne en fonction du prix du sous jacent lorsque $t=0$ pour $S_{max} = 200, K = 120, \sigma = 0.15, r = 0.05, N = 300, T = 1$ et $M = 200$	25
2.4	Call approché et Call exacte pour $S_{max} = 300, K = 180, \sigma = 0.15, r = 0.05, N = 300; M = 200$ et $T = 1$	26
2.5	Erreur en fonction du nombre de points de discretisation en espace pour $S_{max} = 200, K = 120, \sigma = 0.15, r = 0.05, M = 100$ et $T = 1$	26
3.1	Prix d'un call pour $\lambda = 1, S_{max} = 100, K = 70, \sigma = 0.15, r = 0.05, N = 300, M = 300, T = 1, \delta = 0.1$ et $\mu = -0.09$	38
3.2	Prix d'un call européenne en fonction du prix du sous jacent à tout instant pour $\lambda = 1, S_{max} = 100, K = 70, \sigma = 0.15, r = 0.05, N = 300, M = 300, T = 1, \delta = 0.1$ et $\mu = -0.09$	39
3.3	Prix d'un call approché et d'un call exacte pour $\lambda = 1, S_{max} = 100, K = 70, \sigma = 0.15, r = 0.05, N = 300, M = 300, T = 1, \delta = 0.1$ et $\mu = -0.09$	39
3.4	Prix d'un call approché et d'un call exacte pour $\lambda = 0, S_{max} = 100, K = 70, \sigma = 0.15, r = 0.05, N = 300, M = 300, T = 1, \delta = 0.1$ et $\mu = -0.09$	40
3.5	Courbe de l'erreur en fonction du nombre de pas de discretisation en espace pour $\lambda = 1, S_{max} = 100, K = 70, \sigma = 0.15, r = 0.05, M = 300, T = 1, \delta = 0.1$ et $\mu = -0.09$	40

Table des matières

Dédicaces	i
Remerciements	ii
Table des sigles	iii
Résumé	iv
Abstract	v
Table des figures	vi
Introduction	1
1 PRELIMINAIRES	3
1.1 Vocabulaire financier	3
1.1.1 Marché financier	3
1.1.1.1 Définition et rôle du marché financier	3
1.1.1.2 Intervenants	3
1.1.2 Généralités sur les produits dérivés	4
1.1.2.1 Définitions et vocabulaire	4
1.1.2.2 Composantes du prix de l'option	5
1.1.2.3 Bornes sur les prix et relation de parité	5
1.1.2.4 Opportunité d'arbitrage	6
1.2 Préliminaire en finance mathématique	6
1.2.1 Outils du calcul stochastique	7
1.2.1.1 Généralité sur les processus stochastiques	7
1.2.1.2 Martingales et mouvement brownien	8
1.2.1.3 Intégrale stochastique et lemme d'Ito	9
1.2.2 Processus de Lévy à activité finie	9
1.2.2.1 Définitions	10
1.2.2.2 Processus de poisson et processus poisson composé	10
1.2.2.3 Lemme Ito pour les processus saut-diffusion	11
1.3 Méthode des différences finies	12
1.3.1 Principe	12
1.3.2 Consistance, Stabilité et Convergence de la méthode	12
1.3.2.1 Consistance	12
1.3.2.2 Stabilité	13

1.3.2.3	Convergence	13
2	ETUDE DU MODELE DE BLACK ET SCHOLES	14
2.1	Cadre, hypothèses et formulation du modèle	14
2.1.1	Cadre et hypothèses du modèle	14
2.1.2	Formulation de l'équation	15
2.2	De l'équation de black et scholes à l'équation de la chaleur	16
2.2.1	Changement de variables	17
2.2.2	Calcul des nouvelles dérivées et nouvelle équation de (2.6)	17
2.2.3	Nouvelles conditions et nouveau système	18
2.3	Résolution numérique	19
2.3.1	Discrétisation du système (T)	19
2.3.2	Etude la consistance et la stabilité du schéma numérique	20
2.4	Résultats numériques et discussions	24
3	ETUDE DU MODELE DE MERTON	28
3.1	Cadre, hypothèses et formulation du modèle	28
3.1.1	Cadre et hypothèses du modèle	28
3.1.2	Formulation de l'équation	29
3.2	Transformation de l'équation	31
3.2.1	Changement de variables	31
3.2.2	Nouveau système d'équation	31
3.3	Résolution numérique	33
3.3.1	Discrétisation du système (3.14)	33
3.3.2	Etude la consistance et stabilité du schéma numérique	35
3.4	Résultats numériques et discussion	38
	Annexes	43
	Bibliographie	52

Introduction

Soit un actif financier et une option (d'achat ou de vente) sur cet actif à support négociable en bourse. Si le marché fonctionne correctement et s'il n'existe pas de distorsions (des coûts de transactions), *Est-il possible de déterminer, pendant toute la durée du contrat de l'option, le premium instantané de cette option vers lequel doit tendre le prix réalisé en bourse?* Telle pourrait être la question fondamentale posée par la problématique de l'évaluation des options. Qu'il s'agisse d'évaluer les stratégies de gestion active de portefeuille optionnelle en vue d'éliminer (sinon réduire) le risque de marché, il est nécessaire de connaître aussi précisément que possible la valeur du premium ou tout simplement la somme que consent à verser, au moment de la transaction, l'acheteur du contrat d'option au vendeur du contrat pour jouir des avantages futurs que lui procurera ledit contrat.

C'est dans cette optique que Bachelier (1900) fut le pionnier d'une nouvelle branche mathématique, appelée finance mathématique, qui permet de modéliser le processus de prix des actifs financiers à l'aide du calcul stochastique et d'en déduire la valeur instantanée du premium théorique. La détermination de cette valeur conduit à une E.D.P. ou une E.I.D. dont la résolution peut être analytique (pour la solution exacte) ou numérique (pour une solution approchée ou une approximation de la solution exacte).

Ce travail s'inscrit dans le cadre de la résolution numérique de ces équations pour l'évaluation des options Européennes. Verraux [22] a évalué analytiquement et numériquement une option Européenne. Il effectue un changement des variables lui permettant de quitter de l'équation de Black et Scholes à celle de la chaleur et déduit la solution analytique de Black et Scholes. Il la résout numériquement en utilisant plusieurs schémas numériques. Cont et Voltchova[17] ont proposé une méthode d'évaluation dans les modèles saut-diffusion (à activité finie et non finie) en utilisant un schéma du type explicite-implicite. Tout récemment, Noupelah[28] a résolu l'équation de Black et Scholes en utilisant la méthode pseudospectrale de type collocation Tchebychev où les points de collocations choisis sont ceux de Gauss-Lobatto.

Le but de notre travail est de participer à cette réflexion en formulant et en résolvant numériquement par la méthode des différences finies l'E.D.P. d'une option Européenne dont le sous-jacent suit un mouvement brownien standard et l'E.I.D. d'une option Européen dont le sous-jacent suit un processus saut-diffusion.

Notre travail est subdivisé en trois chapitres :

1. Le premier chapitre, intitulé "Preliminaires", présente les prérequis sur le marché financier, c-a-d, le rôle du marché financier, les différents intervenants sur le marché et un vocabulaire sur la finance. Il présente les prérequis du calcul stochastique et la méthode des différences finies.

2. Le deuxième chapitre, intitulé "Etude du modèle de Black et Scholes", propose la

formulation, la résolution numérique du modèle et les interprétations des résultats obtenus.

3. Le troisième chapitre, intitulé "Etude du modèle de Merton", propose la formulation, la résolution numérique du modèle et les interprétations des résultats obtenus.

Nous terminons par une conclusion qui contient les remarques finales.

Chapitre 1

PRELIMINAIRES

Pour étudier le modèle de Black et Scholes et celui de Merton nous avons besoin de certains prérequis en finance et en mathématique. Le but de ce chapitre est de donner les hypothèses et les notions qui nous permettent de formuler ces modèles. De plus, nous présenterons le rôle du marché financier, ses différents intervenants et les produits dudit marché.

1.1 Vocabulaire financier

Dans cette section, nous parlerons de la raison d'être des marchés financiers, ce qui nous conduit à présenter les produits dérivés qui sont des instruments du marché financier et enfin nous parlerons d'une notion très importante pour la compréhension de l'établissement des différents modèles.

1.1.1 Marché financier

1.1.1.1 Définition et rôle du marché financier

Les marchés organisés ont essayés de mettre en place des règles de fonctionnement qui limitent à la fois le risque de contrepartie et de liquidité. L'essentiel est tiré de [21].

Définition 1 *Le marché financier est la place plus ou moins physique, organisée de façon à mettre en relation les agents à capacité de financement et les agents à besoin de financement.*

Le premier rôle des marchés financiers, celui qui a motivé leur apparition et qui demeure l'un des plus importants, est de faciliter le transfert de liquidité des agents ayant des capacités de placement vers ceux qui ont besoin de financement (c'est la mobilisation de l'épargne). A ce rôle premier, s'ajoute une fonction d'allocation des risques, qui a prit une ampleur considérable depuis une vingtaine d'années avec le développement des produits dérivés. Les marchés financiers contribuent à l'information des agents économiques, notamment par le canal des prix qui reflètent la situation des entreprises et du marché dans la mesure où ce dernier est efficient (c'est la valorisation et le baromètre de l'économie). Enfin elle permet à l'épargnant à tout moment de faire des arbitrages et de s'orienter vers les actifs les plus attrayants.

1.1.1.2 Intervenants

Nous avons trois catégories d'intervenants sur le marché financier :

- Les opérateurs de couverture¹ qui utilisent les produits dérivés pour réduire leur exposition au risque (risque de change, risque climatique,...). Un opérateur de risque peut être un agriculteur, une entreprise avec des revenus futurs.
- Les spéculateurs : ils prennent une position contraire à la tendance en cours. A l'inverse des **hedgers**, ils prennent volontiers le risque.
- Les arbitragistes : Ils profitent de la différence des prix existant entre différents marchés pour faire des plus-values (bénéfices).

1.1.2 Généralités sur les produits dérivés

1.1.2.1 Définitions et vocabulaire

Un actif sous-jacent est un actif de base sur le marché financier donc la valeur future est incertaine. Comme exemple d'action nous avons l'indice boursier (CAC 40). On pourra les retrouver dans [6], [1] ou [2].

Définition 2 *Un produit dérivé est un instrument du marché financier dont la valeur varie en fonction de l'actif sous-jacent.*

Nous distinguons notamment les Swaps, Warrants, forward et les options. Dans ce qui suit, présentons les options qui feront l'objet de notre mémoire.

Une option est un contrat qui permet à son détenteur d'acheter ou de vendre une certaine quantité d'actif à un prix² fixé à l'avance et à une date donnée³. Le payoff d'une option est le maximum entre 0 et le flux engendré par un exercice immédiat.

L'option Européenne est l'option exercée seulement le jour de l'échéance, qui diffère de l'option américaine qui peut être exercée avant le jour de l'échéance et de l'option à barrière qui est exercée uniquement si le prix du sous-jacent franchit ou ne franchit pas une certaine limite.

Une option d'achat⁴ donne droit à son détenteur d'acheter une certaine quantité d'actifs sous-jacents. Le payoff d'une option d'achat Européenne est : $\max(S_T - K, 0)$.

Une option de vente⁵ donne droit à son détenteur de vendre une certaine quantité d'actifs sous-jacents. Le payoff d'une option de vente Européenne est : $\max(K - S_T, 0)$.

Une option dans la monnaie⁶ engendrerait un flux $(S_t - K)$ positif si elle était exercée immédiatement. Ainsi, un call (respectivement un put) est dans la monnaie si le cours du

1. hedgers
 2. le strike
 3. maturité
 4. le call
 5. le put
 6. in the money

sous-jacent est supérieur (respectivement inférieur) au prix d'exercice.

Une option à la monnaie⁷ engendrerait un flux nul si elle était exercée immédiatement. On dit qu'un call (respectivement un put) est dans la monnaie si le cours du sous-jacent est égal au prix d'exercice.

Une option en dehors de la monnaie⁸ engendrerait un flux négatif si elle était exercée immédiatement. On dit qu'un call (respectivement un put) est en dehors de la monnaie si le cours du sous-jacent est inférieur (respectivement supérieur) au prix d'exercice.

1.1.2.2 Composantes du prix de l'option

Le prix de l'option ne dépend non pas seulement de l'offre et de la demande sur le marché mais aussi des anticipations de résultats de la valeur à l'échéance. La valeur de l'option est par conséquent composée de deux parties :

- La valeur intrinsèque ou la valeur réelle de l'option représente le profit qui sera obtenu immédiatement si l'on exerce l'option.
- La valeur temps mesure la probabilité, que d'ici l'échéance de l'option, l'évolution du cours du sous-jacent accroisse la valeur intrinsèque de l'option. C'est la différence entre la prime et la valeur intrinsèque. ([1], [25] ou [9]).

1.1.2.3 Bornes sur les prix et relation de parité

L'essentiel est tiré de [1] et [21].

Les bornes sont des outils précieux pour vérifier qu'un algorithme de valorisation est bien implémenté.

- Une option d'achat ne peut jamais valoir plus que l'actif sous-jacent, c'est à dire, $C \leq S_0$. De plus, elle ne peut jamais valoir moins que $S_0 - Ke^{-rT}$, c'est à dire, $C \geq \max\{S_0 - Ke^{-rT}, 0\}$.
- Une option de vente ne peut jamais valoir plus que le strike (K), en particulier à la maturité, c'est à dire, $P \leq Ke^{-rT}$. De plus, elle ne peut jamais valoir moins que $Ke^{-rT} - S_0$, c'est à dire, $P \geq \max\{Ke^{-rT} - S_0, 0\}$

Toutes ces propriétés peuvent se résumer dans le résultat classique suivant.

Proposition 1 Soit C et P le prix du call et du put d'une option Européenne à la date 0 .

$$\max\{S_0 - Ke^{-rT}, 0\} \leq C \leq S_0 \quad \text{et} \quad \max\{Ke^{-rT} - S_0, 0\} \leq P \leq Ke^{-rT}$$

De ce résultat, on déduit que

$$C - P = S_0 - Ke^{-rT}$$

Cette relation à tout instant s'écrit :

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

7. at the money

8. out the money

Terminons cette partie par d'autres produits dérivés.

Contrat à terme

Une opération à terme est une opération au comptant différée dans le temps : les conditions de l'échange sont définitivement fixées à la date où le contrat est noué, mais l'échange d'argent n'a lieu qu'à la maturité.

Un contrat à terme est un contrat qui donne à l'investisseur l'obligation d'acheter ou de vendre un titre à un prix défini à l'avance pendant une période fixée.

Swaps

C'est un contrat qui relie deux parties dans l'échange des flux financiers futur. Ici, il n'y a pas d'échange de capitaux.

Forward

C'est un engagement ferme à acheter ou à vendre un actif sous-jacent, à une date future donnée et pour un prix convenu.

1.1.2.4 Opportunité d'arbitrage

Dans ce paragraphe, nous développerons une notion importante pour faciliter la compréhension des modèles en finance.

Un arbitrage sur $[0, T]$ est une stratégie autofinçant X , de valeur nulle en $t = 0$ dont la valeur X_T en T est positive et strictement positive. C'est à dire

$$X_0 = 0, \quad X_T \geq 0 \quad \text{et} \quad p(X_T > 0) > 0$$

Autrement dit, un investisseur gagne de l'argent à coup sûr sans prendre de risque sur le marché.

On fait donc l'hypothèse d'une absence d'opportunité d'arbitrage entre tout instant 0 et T , c'est à dire,

$$\{X_0 = 0, \quad \text{et} \quad X_T \geq 0\} \Rightarrow p(X_T > 0) = 0$$

Elle signifie simplement que si ma richesse aujourd'hui est nulle, elle ne peut devenir positive et non identiquement nulle, en d'autres termes "On ne peut gagner de l'argent sans capital initial". Ce qui nous conduit à la loi fondamentale en finance. [24], [26] ou [25].

Dans un marché très liquide où il n'y a pas de coût de transactions, pas d'asymétrie de l'information, ni de limitation sur la gestion des actifs supports, il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage, c'est à dire, qu'il n'est pas possible de gagner de l'argent à coup sûr à partir d'un investissement nul.

1.2 Préliminaire en finance mathématique

Pour définir et valider chacune des hypothèses de nos modèles, nous avons besoin d'un cadre probabiliste et des outils du calcul stochastique.

On considère un intervalle de temps $[0, T]$; l'observateur se situe à une date t quelconque dans cet intervalle de temps fini mais, sauf mention contraire, il se situera à la date 0.

On considère un espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) où Ω est l'ensemble des états possibles du monde, \mathcal{F} est une σ -algèbre de parties de Ω et P est la mesure de probabilité définie sur Ω .

1.2.1 Outils du calcul stochastique

Le calcul stochastique est l'étude des phénomènes aléatoires (incertains) dépendant du temps. Cette modélisation utilise des outils conceptuels tel que les processus stochastiques, les filtrations, les martingales et le mouvement brownien. [21], [26] ou [25].

1.2.1.1 Généralité sur les processus stochastiques

Définition 3 *Un processus stochastique à valeurs dans (E, \mathcal{A}) et basé sur (Ω, \mathcal{F}, P) est une famille de variable aléatoires $X = (X_t)_{t \geq 0}$ de (Ω, \mathcal{F}, P) à valeurs dans l'espace d'état (E, \mathcal{A}) .*

Soit $\omega \in \mathbb{R}$, la trajectoire d'un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ associée à ω est la fonction définie de T vers E par $\forall t \in T, X_t(\omega)$. Autrement dit l'application $t \mapsto X_t(\omega)$ est appelée la trajectoire associée à ω . Le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est dit à trajectoires continues si pour tout $\omega \in \Omega$, $t \mapsto X_t(\omega)$ est à trajectoire continue.

Un processus stochastique permet donc de faire une représentation simplifiée de l'état d'un système évoluant avec incertitude au cours du temps. Les observations que l'on peut faire d'un processus stochastique constituent ses trajectoires.

L'information disponible à un instant t compris entre 0 et T est représentée par une σ -algèbre \mathcal{F}_t , regroupant l'ensemble des événements observables en t : on sait donc à la date t si un événement de \mathcal{F} est réalisé ou non. Le nombre d'événements observables augmente avec le passage du temps et ainsi \mathcal{F}_t est enrichi à chaque instant par l'arrivée de nouvelles informations. Cette dynamique des informations est représentée par une succession continue de σ -algèbre \mathcal{F}_t appelée filtration. D'où les définitions suivantes :

Définition 4 1. *Une famille croissante au sens de l'inclusion $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ de sous tribu de \mathcal{F} est appelée filtration.*

2. *Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est dit adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ si X_t est \mathcal{F}_t -mesurable pour tout t .*

3. *Une filtration naturelle d'un processus X est la famille croissante de tribu notée $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ et définie par $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$: C'est la σ -algèbre engendrée par la famille de sous tribus $(X_s)_{0 \leq s \leq t}$.*

4. *Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est dit prévisible pour $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ si X_t est \mathcal{F}_{t-1} -mesurable pour tout t .*

Une filtration satisfait les trois conditions suivantes :

(i) \mathcal{F}_0 est composé des événements de probabilité égale à 0 ou 1. Cette condition signifie trivialement que l'on sait, dès la date 0, si un événement observable à cette date est réalisé.

(ii) $\forall t, s \geq 0, s < t \iff \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$. Cette condition signifie que l'observateur garde ses observations en mémoire tout en accumulant de nouvelles informations et de ce fait le

système d'information \mathcal{F}_t est plus ample que \mathcal{F}_s si et seulement si $t > s$.

(iii) $\mathcal{F}_s = \bigcap_{t > s} \mathcal{F}_t$. Cette condition signifie que l'information n'arrive pas de manière discrète mais de manière progressive et continue.

1.2.1.2 Martingales et mouvement brownien

Définition 5 Soit $(\Omega, F, P, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ un espace probabilisé filtré et un processus stochastique adapté et intégrable ($E|X_t| < \infty$ pour tout t).

$(X_t)_{t \geq 0}$ est :

- Une martingale si $\forall s, t \in T, s \leq t$ alors $E(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$.
- Une sur-martingale si $\forall s, t \in T, s \leq t$ alors $E(X_t | \mathcal{F}_s) \leq X_s$.
- Une sous-martingale si $\forall s, t \in T, s \leq t$ alors $E(X_t | \mathcal{F}_s) \geq X_s$.

La définition de martingale stipule que : étant donné l'information observée jusqu'à t , la valeur espérée du processus futur est la valeur présente.

Proposition 2 1. Si $n \leq n+p \leq N$, $E(X_{n+p} | \mathcal{F}_n) = X_n$, en particulier $X_n = E(X_N | \mathcal{F}_n)$.

2. Si $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe, $(\phi(X_n))$ est une sous martingale.

3. Une combinaison linéaire de famille finie de martingale et une martingale.

4. $E(X_n) = E(X_0)$.

Afin de prendre en compte le caractère très erratique (irrégulier) des cours des actifs financiers, Bachelier (1900) les modélisent à l'aide d'un mouvement brownien avec tendance. Une telle modélisation conduit à des prix qui peuvent être négatifs. Ainsi Samuelson (1960) propose de retenir cette modélisation pour les rendements, plutôt que pour les cours eux-mêmes.

Définition 6 1. Un mouvement brownien standard ou processus de Wiener est un processus stochastique $\{B_t, t \geq 0\}$ vérifiant :

- $B_0 = 0$
- $B_t - B_s$ obéit à une loi normale de moyenne 0 et de variance $t-s$
- $\{B_t, t \geq 0\}$ est à accroissement indépendant : Pour $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ on a $B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_3} - B_{t_2}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$.
- toutes les trajectoires sont continues.

2. Un mouvement brownien arithmétique est un mouvement brownien arithmétique auquel on ajoute un coefficient de dérive (μ) et un coefficient de diffusion (σ); c-a-d, $B_t^A = \mu t + \sigma B_t$.

3. Soit B_t est un mouvement brownien standard avec dérive (μ) et variance égale à σ^2 . Le processus stochastique défini par $\{S_t = e^{B_t}, t \geq 0\}$ est un mouvement brownien géométrique.

- Les propriétés du mouvement brownien arithmétique sont :
 - (i) Les accroissements d'un mouvement brownien arithmétique ont une espérance et une variance proportionnelles à la durée de l'intervalle sur lequel ils sont calculés : $B(t)-B(s)$ est donc distribué selon une loi $N(\mu(t-s), \sigma^2(t-s))$.
 - (ii) Pour $s < t$, $\text{cov}(B(s), B(t)) = \sigma^2 s$.
 - (iii) Les trajectoires du mouvement brownien sont continues.
 - (iv) Il est markovien.

- Les propriétés du mouvement brownien géométrique sont les suivantes :
 - (i) Les rendements $\ln S_t - \ln S_s$ suivent une loi normale de moyenne $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-s)$ et de variance $\sigma^2(t-s)$.
 - (ii) Pour $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ les accroissements relatifs $\{\frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}}\}$ sont indépendants et de même loi.
 - (iii) Il est toujours positif.
 - (iv) Il est markovien.

1.2.1.3 Intégrale stochastique et lemme d'Ito

Définition 7 Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique et $S_n = \sum_{k=1}^n X_{t-k}(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})$ la somme définie sur n intervalles de $[0, t]$ de même longueur. L'intégrale stochastique, notée $I = \int_0^t X(s)dB(s)$, est la limite de S_n (presque sûrement ou en moyenne quadratique).

Définition 8 Un processus d'Ito est un processus adapté et continue sur $[0, T]$ de la forme :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \psi_s ds + \int_0^t \phi_s dB_s$$

où $\int_0^t |\psi_s| ds < \infty$ p.s et $\int_0^t \phi_s^2 ds < \infty$ p.s.

On adopte souvent la notation

$$dX_s = \psi_s ds + \phi_s dB_s. \tag{1.1}$$

Proposition 3 (Lemme d'Ito) Soit X un processus d'Ito vérifiant (1.1), $f \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] * \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et à dérivée bornées.

La dynamique du processus $f(t, X_t)$ est défini par :

$$df(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)\psi_t dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)\phi_t dB_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t)\phi_t^2 dt.$$

1.2.2 Processus de Lévy à activité finie

Les processus saut diffusion forment une classe particulière de processus de Lévy. Notre but est d'étudier la sous classe des processus saut-diffusion de cette classe. [1], [2], [3], [5], [12], [16] ou [23].

1.2.2.1 Définitions

Un **processus de diffusion** est un processus stochastique markovien à temps continu avec trajectoire continue presque sûrement. Citons comme exemple le mouvement brownien.

Un **processus de saut** est un processus stochastique à temps continu qui comprend les sauts mais qui n'est pas nécessairement constant entre les sauts. Citons comme exemple le processus de poisson.

Un **processus de diffusion avec saut** est un processus de sauts où entre les sauts l'évolution est décrite par un processus de diffusion. Citons comme exemple le mouvement brownien combiné avec un processus de poisson.

1.2.2.2 Processus de poisson et processus poisson composé

Nous allons donner deux définitions équivalente du **Processus de poisson** avec intensité λ . La première est la définition la plus utilisée.

Définition 9 Soit une famille $(T_n, n \in \mathbb{N})$ avec $(T_0 = 0)$ de variables aléatoire représentant les temps d'arrivées, telles que les variables aléatoire $(T_{n+1} - T_n, n \in \mathbb{N})$ sont i.i.d de loi exponentielle de paramètre λ .

1. Un processus de poisson N associé à $(T_n, n \in \mathbb{N})$ est un processus de comptage

$$\forall t > 0, N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{T_n \leq t}.$$

2. Soit N un processus stochastique (issu de 0) à valeurs réelles et cadlag. N est un processus de poisson si et seulement si :
 - N est un processus croissant, constant par morceaux, ne faisant intervenir que les sauts de taille 1.
 - $\forall t, s \geq 0$ la variable aléatoire $N_{t-s} - N_t$ a même loi que N_s .
 - $\forall t, s \geq 0$ la variable aléatoire $N_{t-s} - N_t$ est indépendante de la tribu engendrée par les $(N_u, 0 \leq u \leq t)$.

Les variables aléatoires T_n ci dessous définissent les sauts du processus N :

$$T_0 = 0 \text{ et pour } n \geq 1, T_n = \inf\{t > T_{n-1}; N_t - N_{t_{n-1}}\}.$$

Ce sont des temps d'arrêt par rapport à la filtration naturelle du processus N .

Proposition 4 Si N est un processus de poisson alors :

1. Les trajectoires de N sont constants par morceaux avec les sauts de taille 1.
2. $\forall t \geq 0, N_t$ suit une loi de poisson de paramètre λt :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(N_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

En particulier on a

$$E(N_t) = \text{Var}(N_t) = \lambda t; \quad M_{N_t}(iu) = E(e^{iuN_t}) = \exp(\lambda t(e^{iu} - 1)).$$

3. N est à accroissement indépendant et stationnaire.

4. Si N est un processus de poisson d'intensité $\lambda > 0$ alors, lorsque t tend vers $+\infty$

$$p.s \frac{N_t}{t} \rightarrow \lambda \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{t}{\lambda}} \left(\frac{N_t}{t} - \lambda \right) \rightarrow N(0, 1).$$

La distribution de poisson est souvent utilisée pour décrire le nombre de réalisation d'un évènement dont la probabilité est faible et c'est d'ailleurs pourquoi on parle de "loi des évènements rares".

Définition 10 soit $\{N_t, t \geq 0\}$ un processus de poisson d'intensité $\lambda > 0$ et $(y_n)_n$ une séquence de variables aléatoire i.i.d et aussi indépendant de N_t .

Un processus de poisson composé avec intensité $\lambda > 0$ de loi de saut ν_y est un processus stochastique définir par : $X(t) = \sum_{i=1}^{N_t} y_i$.

En d'autre mots, un processus de poisson composé est processus constant par morceau qui saute aux instants de sauts d'un processus de poisson standard, et dont les tailles de sauts sont les variables i.i.d d'une loi donnée.

Ces processus peuvent être utilisés pour modéliser :

→ les arrivées d'avions dans un aéroport : chaque avion transporte un nombre de passagers.

→ le trafic routier : chaque accident engendre un certain nombre de blessés.

Proposition 5 Soit X un processus de poisson composé, alors :

1. $E(X_t) = \lambda t E(y)$, $var(X_t) = \lambda t E(y^2)$ et $E(e^{iuX_t}) = \exp(\lambda t (M_y(iu) - 1))$.

2. X est à accroissement indépendant et stationnaire.

1.2.2.3 Lemme Ito pour les processus saut-diffusion

Lorsqu'un processus $(X_t, t \geq 0)$ contient des sauts, alors la transformation $f(t, X_t)$ va également sauter à chaque observation d'un saut. Ainsi le lemme d'Ito conventionnel s'applique dans la partie continue du processus et on ajoutera l'impact des sauts sur la transformation $f(t, X_t)$.

Supposons un processus saut diffusion $X_t = X_0 + \int_0^t \alpha_s ds + \int_0^t \beta_s dW_s + \int_0^t dN_s$ où β_t est adapté et α_t est prévisible. La différentielle de X_t est :

$$dX_t = X_{t-} (\alpha_t dt + \beta_t dW_t + dN_t). \quad (1.2)$$

où $X_{t-} = \lim_{n \rightarrow t-} X_n$ (caractère prévisible du processus X_t).

Proposition 6 (Lemme d'Ito saut-diffusion) Soit X_t un processus vérifiant (1.2) et $f \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] * \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Alors

$$df(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial f}{\partial X}(t, X_t) X_t \alpha_t dt + \frac{\partial f}{\partial X}(t, X_t) X_t \beta_t dW_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2}(t, X_t) X_t^2 \beta_t^2 dt + (f(t, X_{t-} + \Delta X_t) - f(t, X_{t-})) dN_t.$$

1.3 Méthode des différences finies

Une équation aux dérivées partielles (E.D.P.) fait intervenir plusieurs variables indépendantes (temps et espace,...), ainsi que les dérivées partielles de la variable dépendante par rapport à ses variables indépendantes. Une équation intégro-différentielle (E.I.D.) est une équation aux dérivées partielles contenant un ou des termes intégrales[15].

Pour résoudre numériquement une E.D.P. ou une E.I.D. donnée; l'idée est donc de construire une équation discrète où les opérateurs différentiels sont remplacés par les opérateurs d'approximation.

La question qui se pose donc naturellement est de savoir si la solution de l'équation discrète particulière obtenue en utilisant la méthode des différences finies approxime celle du problème.

L'objet de la suite est de présenter cette méthode.

1.3.1 Principe

La méthode des différences finies (technique de recherche de solutions approchées aux dérivées partielles) consiste à approximer les dérivées des équations au moyen des développements de Taylor. Le principe de la méthode est le suivant :

1. Discrétisation du domaine : (On maille le domaine) nous pouvons avoir des maillages en 1 D, en 2 D,... La méthode recherche une solution aux noeuds du maillage.
2. Discrétisation de l'équation aux dérivées partielles : On écrit à chaque noeud une approximation algébrique de l'équation d'origine.
3. Système d'équations : On écrit autant d'équation algébrique qu'il y'a de noeuds où on cherche la solution.
4. Résolution : On résout le système discrétisé. [13], [14], [15] ou [20]

1.3.2 Consistance, Stabilité et Convergence de la méthode

1.3.2.1 Consistance

C'est la propriété qui assure que la solution exacte des équations discrétisées tende vers la solution exacte des équations continues lorsque les pas de discrétisation en temps et en espace (dans le cas d'une discrétisation spatio-temporelle) tendent vers zéro.

Soit

$$\mathcal{A}(u) = 0 \tag{1.3}$$

une E.D.P. de manière à générer un schéma aux différences finies

$$\mathcal{A}_{h,\Delta t}(u) = 0. \tag{1.4}$$

Définition 11 1. Le schéma aux différences finies (1.4) est dit consistant avec l'équation aux dérivées partielles (1.3), si pour toute solution $u(t,x)$ suffisamment régulière de cette équation, l'erreur de troncature du schéma définie par : $R_{h,\Delta t} = \mathcal{A}_{h,\Delta t}(u) - \mathcal{A}(u)$ tend vers zéro, uniformément par rapport à (t,x) , lorsque h et Δt tendent vers zéro.

2. Le schéma est précis à l'ordre p en espace et à l'ordre q en temps si l'erreur de troncature tend vers zéro comme $\mathcal{O}((h)^p + (\Delta t)^q)$ lorsque h et Δt tendent vers zéro.

L'analyse de la consistance conduit à déterminer l'erreur de troncature du schéma ainsi que l'ordre de précision.

1.3.2.2 Stabilité

C'est la propriété qui assure que la différence entre la solution numérique et la solution exacte est bornée. Pour la définir, nous utiliserons les normes classiques sur \mathbb{R}^N pour la solution numérique $u^n = (u_j^n)_{1 \leq j \leq N}$.

- norme l_∞ $\|u^n\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq N} |u_j^n|$.
- norme l_2 $\|u^n\|_2 = \left(\sum_{j=1}^N h |u_j^n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.
- norme l_1 $\|u^n\|_1 = \sum_{j=1}^N h |u_j^n|$.

Définition 12 1. Un schéma aux différences finies est dit stable pour l'une des normes définie ci-dessus, s'il existe une constante $K > 0$ indépendante de h et Δt telle que

$$\|u^n\| \leq K \|u^0\| \quad \text{pour tout } n \geq 0 \quad (1.5)$$

quelque soit la condition initiale u^0 .

2. Si (1.5) a lieu sous une condition entre Δt et h , alors le schéma numérique dit **conditionnellement stable**.

En d'autre terme, c'est à dire, l'erreur commise à l'instant $t = 0$ sur les données initiales ne s'amplifie pas au cours du temps.

Nous pouvons citer quelques méthodes d'étude de la stabilité :

- Méthode de Von Neumann : Elle consiste à développer les variables en série de Fourier ou en série trigonométrique, ensuite calculer le facteur d'amplification A . La condition de stabilité est $|A| \leq 1$.
- Méthode d'analyse matricielle : elle consiste à étudier l'opérateur de passage. La condition de stabilité est le rayon spectral (le maximum des valeurs propres réelles) de la matrice de passage doit être inférieur ou égale à 1.

1.3.2.3 Convergence

C'est la propriété qui assure que la solution numérique tend vers la solution exacte du problème continu.

Ces propriétés sont liées les unes aux autres par le théorème suivant.

Théorème 1 (LAX)

Dans un problème bien posé, et avec un schéma numérique consistant, la stabilité est une condition nécessaire et suffisante pour la convergence.

Chapitre 2

ETUDE DU MODELE DE BLACK ET SCHOLES

Dans ce modèle, nous étudions un marché financier dans lequel sont échangés deux actifs risqués. Ici, le portefeuille est parfaitement sans risque. Le modèle et la formule de Black et Scholes s'est imposé comme une référence depuis les années 1973 dans l'évaluation des options dû au fait qu'elle possède de nombreux avantages : Sa simplicité d'application et de formule et son importante utilisation par les acteurs du marché.

Dans ce chapitre, nous présenterons l'équation de Black et Scholes et nous étudierons la méthode numérique et les résultats associés.

2.1 Cadre, hypothèses et formulation du modèle

2.1.1 Cadre et hypothèses du modèle

Le modèle de Black et Scholes est un modèle mathématique du marché financier dans lequel le prix de l'actif risqué suit un mouvement brownien géométrique. La négociation sur les marchés financiers modernes peuvent être exécuté en très peu de temps : ce modèle est donc une approximation raisonnable des marchés réels.

Les hypothèses ([1] ou [3]) du modèle sont :

- H1) Absence des coûts de transaction.
- H2) Modèle à temps continu.
- H3) Ventes à découverts autorisées.
- H4) Absence d'opportunité d'arbitrage.
- H5) Aucune dividende versée par l'actif risqué.

Nous considérons un portefeuille constitué d'un actif risqué, d'un actif sans risque et d'un produit dérivé.

♣ **Un actif risqué** en position courte de valeur initiale $S_0 > 0$ connu : donc la dynamique est un mouvement brownien géométrique définit par :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (2.1)$$

où :

μ est un paramètre réel ou le taux de rendement de l'actif risqué, $\sigma > 0$ est la volatilité de

l'actif risqué et $(W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard.

Le rendement instantané est dû à deux contributions :

- la première est déterministe et prévisible (μdt).
- la seconde (σdW_t) représente la variation aléatoire du prix de l'actif due à des effets externes, comme de nouvelles inattendues.

Après la résolution de l'équation aux dérivées stochastique (2.1) en appliquant le lemme d'Ito nous obtenons : $S_t = S_0 \exp(\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t)$.

voir[1]

♣ **Un actif sans risque** de valeur S_t^0 en t de dynamique : $dS_t^0 = rS_t^0 dt$

où

$r > 0$ est une constante appelé taux d'intérêt sur le marché des placements sans risque. Ainsi la valeur à t est : $S_t^0 = S_0^0 \exp(rt)$ où $S_0^0 = 1$ (sans nuire à la généralité).

♣ **Un produit dérivé (le call) Européen** en position longue de maturité T et de prix d'exercice K, Vérifiant $C(S, T) = \max(S_T - K, 0)$.

Après avoir donné les hypothèses du modèle, nous pouvons maintenant le formuler.

2.1.2 Formulation de l'équation

La valeur de notre portefeuille à tout instant est :

$$\pi_t = C_t - \Delta_t S_t \quad (2.2)$$

Déterminons Δ_t tel que le portefeuille soit autofinancé et sans risque.

La condition d'autofinancement exige que :

$$d\pi_t = dC_t - \Delta_t dS_t \quad (2.3)$$

En appliquant le lemme d'Ito à C_t et en remplaçant dS_t de (2.1) et dC_t dans (2.3) nous obtenons :

$$d\pi_t = (\mu S_t \frac{\partial C_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} + \frac{\partial C_t}{\partial t} - \Delta_t \mu S_t) dt + \sigma S_t (-\Delta_t + \frac{\partial C_t}{\partial S_t}) dW_t \quad (2.4)$$

L'élimination du terme risqué donne : $\Delta_t = \frac{\partial C_t}{\partial S_t}$ et (2.4) devient

$$d\pi_t = \frac{\partial C_t}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} dt. \quad (2.5)$$

Puisque le portefeuille est parfaitement sans risque, l'hypothèse (H4) d'absence d'opportunité d'arbitrage donne $d\pi_t = r\pi_t dt$.

En remplaçant π_t de (2.2) et $d\pi_t$ de (2.5) dans l'équation ci-dessus, nous obtenons l'équation de Black et Scholes :

$$\frac{\partial C_t}{\partial t} + r S_t \frac{\partial C_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} = r C_t \quad (2.6)$$

Pour que cette équation admette une solution il faudrait préciser la condition initiale et les conditions aux frontières.

La condition initiale : Puisque c'est une option du type Européenne, nous avons $C(S, T) = \max(S_T - K, 0)$.

conditions aux frontières :

1. $C(S = 0, t) = 0$: En effet, la perte maximale que supporte l'acheteur du call est sa valeur de l'option de ce fait, $C(S_t, t) \geq 0$ et pour une valeur du sous-jacent nulle la valeur de l'option est nulle. Puisque la valeur de l'option ne peut excéder la valeur du sous-jacent.
2. $C(S_{\max}, t) = S_{\max} - K \exp(-r(T - t))$ qui vient de la relation parité Call-Put.

On a le système suivant à résoudre.

$$\begin{cases} \frac{\partial C_t}{\partial t} + rS_t \frac{\partial C_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} = rC_t & S_t \in \mathbb{R}_+, t \in [0, T] \\ C(S_T, T) = \max(S_T - K, 0) & S_t \in [0, \infty[\\ C(0, t) = 0, \quad C(S_{\max}, t) = S_{\max} - K \exp(-r(T - t)) & t \in [0, T] \end{cases} \quad (S)$$

Ce système d'équation admet une unique solution. La solution exacte [1], [3] est donnée par :

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

où

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}$$

et N est défini par : $N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{\frac{1}{2}x^2} dx$.

Grâce aux hypothèses énoncées nous avons formulé notre équation. L'objet de la suite est de résoudre numériquement, pour ce faire nous avons besoin d'effectuer certaines transformations.

2.2 De l'équation de black et scholes à l'équation de la chaleur

L'équation de Black et Scholes est une équation parabolique à coefficients variable. Elle ressemble à une équation de diffusion sauf qu'elle a des termes en trop. Nous allons effectuer quelques changements de variables telle que les propriétés d'invariance de la solution par changement d'échelle et de translation en temps, et celles d'invariance de la solution par changement d'échelle en espace de l'équation de la chaleur soit respectées. Un tel changement de variable va rendre l'équation différentielle plus simple et va occasionner une transformation du domaine et des conditions aux limites.

2.2.1 Changement de variables

Introduisons les nouvelles variables x , τ et v , puis effectuons ces changements de variables :

$$\begin{cases} S = S_0 \cdot \exp(x) \\ t = T - \frac{\tau}{\frac{\sigma^2}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln S - \ln S_0 = \ln \frac{S}{S_0} \\ \tau = \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot (T - t) \end{cases}$$

Ainsi On passe du domaine : $\begin{cases} t \in [0, T] \\ S \in [0, \infty[\end{cases}$ au nouveau domaine : $\begin{cases} \tau \in [0, \frac{\sigma^2 T}{2}] \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$

On obtient donc la nouvelle fonction $v = \frac{C}{S_0}$.

Intépretation :

Le 1^{er} changement de variable stipule qu'on quitte du domaine des prix représenté par S_t au domaine des rendements représenté par x .

Le 2nd changement de variable stipule que nous n'évaluons plus le temps depuis l'origine mais le temps qui reste à parcourir jusqu'à l'échéance.

2.2.2 Calcul des nouvelles dérivées et nouvelle équation de (2.6)

Le calcul des dérivées en laissant les indices temporels nous donne :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t} = \left(-\frac{1}{2}\sigma^2\right) \cdot \frac{\partial C}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial C}{\partial S} = \frac{\partial C}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial S} = \left(\frac{1}{S}\right) \cdot \frac{\partial C}{\partial x}$$

et

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial C}{\partial S} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial C}{\partial S} \right) \frac{\partial x}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{S_0} \exp(-x) \frac{\partial C}{\partial x} \right) \frac{1}{S} = \frac{1}{S^2} \left(-\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right)$$

En remplaçant dans l'équation de Black et Scholes (2.6) nous obtenons :

$$-\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial C}{\partial \tau} + rS \left(\frac{1}{S} \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \left(\frac{1}{S^2} \left(-\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right) \right) = rC$$

En simplifiant et en regroupant les termes, l'équation précédente devient :

$$-\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial C}{\partial \tau} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = rC \quad (2.7)$$

En remplaçant C par $S_0 \cdot v$, (2.7) devient :

$$S_0 \left[-\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial v}{\partial \tau} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] = rS_0 v$$

En simplifiant par S_0 et $-\frac{1}{2}\sigma^2$, l'équation précédente devient :

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(1 - \frac{r}{\frac{\sigma^2}{2}} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{r}{\frac{\sigma^2}{2}} v = 0$$

En posant $q = \frac{r}{\frac{\sigma^2}{2}}$, l'équation précédente devient :

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (1 - q) \frac{\partial v}{\partial x} + qv = 0 \quad (2.8)$$

Appliquons un 2nd changement de variable de v à u défini par : $v(\tau, x) = \exp(\gamma x) \exp(\nu \tau) u(\tau, x)$
(2.8) devient donc :

$$\nu u + \frac{\partial u}{\partial \tau} + (1 - q) \left(\gamma u + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \left(\gamma^2 u + 2\gamma \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + qu = 0$$

L'élimination des termes $\frac{\partial u}{\partial x}$ et u dans l'équation précédente nous donne

$$\begin{cases} -2\gamma + 1 - q = 0 \\ \nu - \gamma^2 + (1 - q)\gamma + q = 0 \end{cases} \quad \text{c-a-d} \quad \begin{cases} \gamma = -\frac{1}{2}(q - 1) \\ \nu = -\frac{1}{4}(q + 1)^2 \end{cases}$$

Nous obtenons :

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Remarque 1 Le 2nd changement de variable qui conduit à l'équation de la chaleur est nécessaire dans la mesure où pour déterminer la solution exacte de l'équation de Black et Scholes on utilise les résultats de la résolution exacte de l'équation de la chaleur.

Nous allons résoudre numériquement l'équation (2.8) qui est une équation d'advection-diffusion.

Pour ce faire précisons les nouvelles conditions et le nouveau système.

2.2.3 Nouvelles conditions et nouveau système

1. Réécrire la condition initiale :

Notons que pour $t=T$ nous avons $\tau=0$. A l'aide des nouvelles variables τ et x , la condition initiale $C(S, T) = \max(S_T - K, 0)$ donne $S_0 \cdot v(x, \tau = 0) = \max(S_0 \cdot \exp(x) - K, 0)$, c-a-d,

$$v(x, \tau = 0) = \max\left(\exp(x) - \frac{K}{S_0}, 0\right). \quad (2.9)$$

2. Délimiter le domaine de x :

Nous allons restreindre le domaine à un intervalle borné. Le domaine est choisi de façon à capturer le comportement global de l'option et de maintenir l'exactitude du prix de l'option.

Puisque

$$x = \ln\left(\frac{S}{S_0}\right), \quad \text{alors,} \quad d = \ln\left(\frac{S_{\max}}{S_0}\right)$$

avec S_{\max} le prix maximal de l'actif.

Par conséquent $x \in [-d, d]$. Cela nous amène à spécifier les conditions aux bords.

3. Réécrire les conditions aux frontières :

A l'aide de nouvelles variables, comme $C(S=0,t)=0$ on imposera que

$$v(x = -d, \tau) = 0; \quad (2.10)$$

Et puisque $C(S = S_{\max}, t) = S_{\max} - K \exp(-r(T - t))$, on a

$$v(x = d, \tau) = \frac{1}{S_0} (S_{\max} - K \exp(-r(T - (T - \frac{2\tau}{\sigma^2}))))).$$

alors

$$v(x = d, \tau) = \frac{1}{S_0} (S_0 \exp b - K \exp(-\frac{2\tau}{\sigma^2} r)). \quad (2.11)$$

Ainsi (2.8), (2.9), (2.10) et (2.11) transforme le système (S) en :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (1 - q) \frac{\partial v}{\partial x} + qv = 0 & x \in [-d, d], \tau \in [0, \frac{\sigma^2 T}{2}] \\ v(x, \tau) = \max(\exp x - \frac{K}{S_0}, 0) & x \in [-d, d] \\ v(x = -d, \tau) = 0 & \tau \in [0, \frac{\sigma^2 T}{2}] \\ v(x = d, \tau) = \frac{1}{S_0} (S_0 \exp b - K \exp(-\frac{2\tau r}{\sigma^2})) & \tau \in [0, \frac{\sigma^2 T}{2}] \end{cases} \quad (T)$$

On a donc transformé l'équation de Black et Scholes en une équation avec les conditions du type Dirichlet.

2.3 Résolution numérique

Ce nouveau système (T) admet une solution analytique unique. Mais la détermination de celle-ci n'est pas toujours évidente vu qu'en pratique le coefficient q peut dépendre du temps. D'où la résolution numérique de cette équation.

2.3.1 Discrétisation du système (T)

- **Discrétisation en espace** : On considère le segment $[-d, d]$. On fixe un nombre de points $N \in \mathbb{N}^*$ et on définit le pas de discrétisation spatiale

$$h = \frac{2 \cdot d}{N}$$

On définit également $(N+1)$ les points de discrétisation spatiale

$$x_j = jh, \quad j = 0, \dots, N$$

- **Discrétisation en temps** : On subdivise le segment le segment $[0, \frac{\sigma^2 T}{2}]$ en $M \in \mathbb{N}^*$ intervalles équidistants de $d\tau$ tel que

$$d\tau = \frac{\sigma^2 T}{2M}$$

On définit également $(M+1)$ les points de discrétisation temporelle

$$\tau^n = nd\tau, \quad n = 0, \dots, M$$

- **Schéma numérique** Nous allons utilisé le θ schéma.

Pour

$$\begin{cases} \tau = \tau^n & n = 0, \dots, M \\ x = x_j & j = 0 \dots N \end{cases}$$

nous avons le θ schéma suivant :

$$\begin{aligned} \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{d\tau} = & \theta \left[\frac{v_{j+1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j-1}^{n+1}}{h^2} - (1-q) \left(\frac{v_{j+1}^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{2h} \right) - qv_j^{n+1} \right] + \\ & (1-\theta) \left[\left(\frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{h^2} \right) - (1-q) \left(\frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2h} \right) - qv_j^n \right] \end{aligned} \quad (2.12)$$

Le système discretisé de (T) devient :

$$\begin{cases} \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{d\tau} = \theta \left[\frac{v_{j+1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j-1}^{n+1}}{h^2} - (1-q) \left(\frac{v_{j+1}^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{2h} \right) - qv_j^{n+1} \right] + \\ (1-\theta) \left[\left(\frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{h^2} \right) - (1-q) \left(\frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2h} \right) - qv_j^n \right] & j = 1, \dots, N-1 \quad n = 1, \dots, M \\ v_j^0 = \max(\exp(jh - d) - \frac{K}{S_0}, 0) & j = 0, \dots, N \\ v_0^n = 0 & n = 0, \dots, M \\ v_N^n = \frac{1}{S_0} (S_0 \exp b - K \exp(-\frac{2nd\tau r}{\sigma^2})) & n = 0, \dots, M \end{cases}$$

2.3.2 Etude la consistance et la stabilité du schéma numérique

Ici, c'est la convergence de ce schéma numérique qui nous interesse. De ce fait, nous devons passer par l'étude de la consistance et de la stabilité.

1. Etude de la consistance

L'erreur de troncature est l'erreur qui correspond à l'approximation d'un opérateur continue par un opérateur discret aux différences finies. La consistance d'un opérateur discret assure à celle-ci de pouvoir représenter exactement l'équation d'origine lorsque les pas de discrétisation tendent vers zéros.

considérons (2.12), Posons :

$$\begin{aligned} \varepsilon_j^n = & \frac{v(x_j, \tau^{n+1}) - v(x_j, \tau^n)}{d\tau} + \theta \left[-\frac{v(x_{j+1}, \tau^{n+1}) - 2v(x_j, \tau^{n+1}) + v(x_{j-1}, \tau^{n+1})}{h^2} + \right. \\ & \left. (1-q) \left(\frac{v(x_{j+1}, \tau^{n+1}) - v(x_{j-1}, \tau^{n+1})}{2h} \right) + qv(x_j, \tau^{n+1}) \right] + \end{aligned}$$

$$(1-\theta)\left[-\frac{v(x_{j+1}, \tau^n) - 2v(x_j, \tau^n) + v(x_{j-1}, \tau^n)}{h^2} + (1-q)\left(\frac{v(x_{j+1}, \tau^n) - v(x_{j-1}, \tau^n)}{2h}\right) + qu(x_j, \tau^n)\right]$$

Pour calculer les erreurs de troncature de l'équation aux différences finies, on effectue les développements en série de Taylor.

Supposons $v \in \mathcal{C}^\infty([-d, d] * [0, T])$

Appliquons le développement de Taylor au point (x_j, τ^n) de $v((x_j, \tau^{n+1}))$ d'inconnue tau on obtient :

$$v(x_j, \tau^{n+1}) = v(x_j, \tau^n) + d\tau\partial_\tau v(x_j, \tau^n) + \frac{d\tau^2}{2}\partial_{\tau\tau}v(x_j, \tau^n) + \mathcal{O}(d\tau^3)$$

D'où

$$\frac{v(x_j, \tau^{n+1}) - v(x_j, \tau^n)}{d\tau} = \partial_\tau v(x_j, \tau^n) + \frac{d\tau}{2}\partial_{\tau\tau}v(x_j, \tau^n) + \mathcal{O}(d\tau^2)$$

Appliquons le développement de Taylor au point (x_j, τ^{n+1}) de $v(x_{j+1}, \tau^{n+1})$ et $v(x_{j-1}, \tau^{n+1})$ on obtient :

$$\frac{v(x_{j+1}, \tau^{n+1}) - 2v(x_j, \tau^{n+1}) + v(x_{j-1}, \tau^{n+1})}{h^2} = \partial_{xx}v(x_j, \tau^{n+1}) + \mathcal{O}(h^2)$$

$$\frac{v(x_{j+1}, \tau^{n+1}) - v(x_{j-1}, \tau^{n+1})}{2h} = \partial_x v(x_j, \tau^{n+1}) + \mathcal{O}(h^2)$$

En remplaçant dans ε_j^n on a :

$$\begin{aligned} \varepsilon_j^n &= \partial_\tau v(x_j, \tau^n) + \frac{d\tau}{2}\partial_{\tau\tau}v(x_j, \tau^n) + \mathcal{O}(d\tau^2) + \theta[-\partial_{xx}v(x_j, \tau^{n+1}) + \mathcal{O}(h^2) + (1-q)\partial_x v(x_j, \tau^{n+1}) + \mathcal{O}(h^2) \\ &+ qv(x_j, \tau^{n+1})] + (1-\theta)[- \partial_{xx}v(x_j, \tau^n) + \mathcal{O}(h^2) + (1-q)\partial_x v(x_j, \tau^n) + \mathcal{O}(h^2) + qv(x_j, \tau^n)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_j^n &= \partial_\tau v(x_j, \tau^n) + \frac{d\tau}{2}\partial_{\tau\tau}v(x_j, \tau^n) + \mathcal{O}(d\tau^2) + \theta[-\partial_{xx}v(x_j, \tau^n) - d\tau\partial_\tau\partial_{xx}v(x_j, \tau^n) + \\ &(1-q)(\partial_x v(x_j, \tau^n) + d\tau\partial_\tau\partial_x v(x_j, \tau^n)) + q(v(x_j, \tau^n) + d\tau\partial_\tau v(x_j, \tau^n))] + \\ &(1-\theta)[- \partial_{xx}v(x_j, \tau^n) + (1-q)\partial_x v(x_j, \tau^n) + qv(x_j, \tau^n)] + \mathcal{O}(h^2) + \mathcal{O}(d\tau^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_j^n &= \partial_\tau v(x_j, \tau^n) - \partial_{xx}v(x_j, \tau^n) + (1-q)\partial_x v(x_j, \tau^n) + qv(x_j, \tau^n) + \frac{d\tau}{2}\partial_{\tau\tau}v(x_j, \tau^n) - \\ &\theta d\tau\partial_\tau\partial_{xx}v(x_j, \tau^n) + \theta(1-q)d\tau\partial_\tau\partial_x v(x_j, \tau^n) + \theta q d\tau\partial_\tau v(x_j, \tau^n) + \mathcal{O}(h^2) + \mathcal{O}(d\tau^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_j^n &= d\tau\partial_\tau\left[\frac{1}{2}\partial_{\tau\tau}v(x_j, \tau^n) - \theta\partial_{xx}v(x_j, \tau^n) + \theta(1-q)\partial_x v(x_j, \tau^n) + \right. \\ &\left. \theta qv(x_j, \tau^n)\right] + \mathcal{O}(h^2) + \mathcal{O}(d\tau^2) \end{aligned}$$

* pour $\theta = \frac{1}{2}$, le schéma est d'ordre 2 en temps et en espace, et consistant avec notre équation (2.8).

★ pour $\theta \neq \frac{1}{2}$, on a :

$$\varepsilon_j^n = d\tau \partial_\tau A + \mathcal{O}(h^2) + \mathcal{O}(d\tau^2)$$

avec $A = \frac{1}{2} \partial_t v(x_j, \tau^n) - \theta \partial_{xx} v(x_j, \tau^n) + \theta(1-q) \partial_x v(x_j, \tau^n) + \theta q u(x_j, \tau^n)$ Comme A est borné,

$$\varepsilon_j^n = \mathcal{O}(d\tau) + \mathcal{O}(h^2) + \mathcal{O}(d\tau^2)$$

le schéma est d'ordre 1 en temps et 2 en espace, et consistant avec notre équation (2.8).

On peut dire que le θ -schéma approxime l'équation (2.8).

2. Etude de la stabilité du schéma numérique

En plus de l'analyse de l'erreur de troncature il est nécessaire d'analyser la stabilité du schéma numérique par la méthode d'analyse matricielle. (2.12) se met sous la forme

$$av_j^{n+1} + bv_{j+1}^{n+1} + cv_{j-1}^{n+1} = a_1 v_j^n + b_1 v_{j+1}^n + c_1 v_{j-1}^n \quad (2.13)$$

avec :

$$a = 1 + 2\alpha\theta + qd\tau\theta, \quad b = -\alpha\theta + \frac{1}{2}(1-q)\theta\beta, \quad c = -\alpha\theta - \frac{1}{2}(1-q)\theta\beta,$$

$$a_1 = 1 - 2\alpha(1-\theta) - qd\tau(1-\theta), \quad b_1 = \alpha(1-\theta) - \frac{1}{2}(1-q)(1-\theta)\beta \quad \text{et} \quad c_1 = \alpha(1-\theta) + \frac{1}{2}(1-q)(1-\theta)\beta,$$

où :

$$\alpha = \frac{d\tau}{h^2}; \quad \beta = \frac{d\tau}{h}$$

En faisant varier j de 1 à N-1 l'équation (2.13) décrit un système suivant :

$$AU^{n+1} = BU^n \Rightarrow U^{n+1} = A^{-1}BU^n$$

où A et B sont des matrices tridiagonales définies par :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & \dots & 0 \\ c & a & b & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \dots & \dots & 0 & c & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ c_1 & a_1 & b_1 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & b_1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & c_1 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Et

$$U^n = \left(U_1^n \quad U_2^n \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad U_{N-1}^n \right)'$$

Pour l'étude de la stabilité on s'intéresse à la matrice de passage $P = A^{-1}B$.

Interpretation

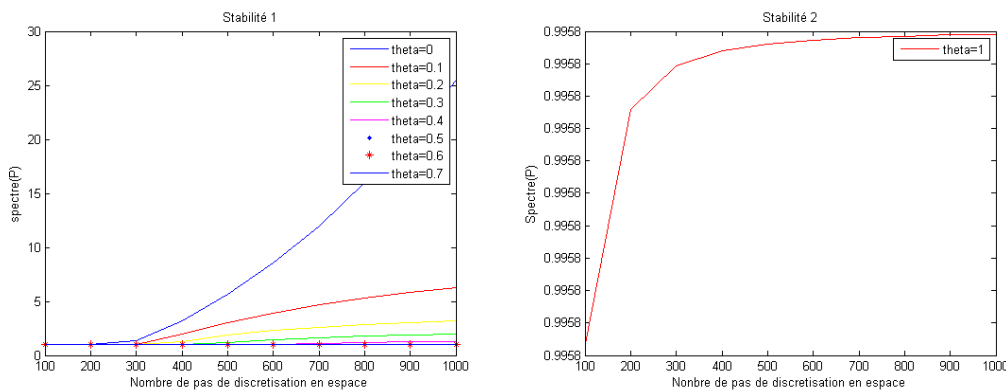


FIGURE 2.1 – Etude de la stabilité lorsque le nombre de pas de discrétisation en temps est 20 pour $S_{\max} = 100$, $T = 1$, $\sigma = 0.15$ et $r = 0.05$.

La figure (2.1) montre l'évolution du rayon spectrale en fonction du nombre de pas de discrétisation en espace, pour différentes valeurs θ .

★ Figure de gauche : Lorsque le nombre de pas de discrétisation en espace est inférieur à 200, la valeur du rayon spectrale pour chaque courbe est inférieure ou égale à 1. Ensuite, la valeur du rayon spectrale augmente au fur et à mesure que le nombre de pas de discrétisation en espace augmente. Au fur et à mesure que θ augmente l'amplitude de chaque courbe diminue. Pour $\theta=0.5$ et $\theta=0.6$ les courbes sont confondues et la valeur du rayon spectrale est toujours inférieure à 1.

★ Figure de droite : Pour $\theta = 1$, le schéma est inconditionnellement stable quel que soit le nombre de pas en espace et en temps.

De ces observations nous remarquons :

- pour $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$, (2.12) est stable sous condition.
- pour $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$, (2.12) est inconditionnellement stable.

De plus, on sait que pour $\theta = \frac{1}{2}$ on retrouve le schéma de Crank Nicolson qui est inconditionnellement stable, pour $\theta = 1$ on retrouve le schéma implicite qui lui aussi est stable sans condition et pour $\theta = 0$ on retrouve le schéma explicite stable sous condition.

**Nous allons utiliser la méthode
fourier von neumann pour confirmer les résultats obtenus.**

Cette méthode stipule que, le module du facteur d'amplification soit inférieur ou égale à 1 c-a-d $|A(\xi)| \leq 1$. Pour cela il s'agit de montrer que $|A(\xi)|^2 - 1 \leq 0$.

Posons : $v_{j+1}^{n+1} = \widehat{v}_j^{n+1} e^{i\xi h}$, $v_{j-1}^{n+1} = \widehat{v}_j^{n+1} e^{-i\xi h}$, $v_{j+1}^n = \widehat{v}_j^n e^{i\xi h}$, et $v_{j-1}^n = \widehat{v}_j^n e^{-i\xi h}$.

le facteur d'amplification est

$$A(\xi) = \frac{\widehat{v}_j^{n+1}}{\widehat{v}_j^n} = \frac{1 - (1 - \theta)[2\alpha + qd\tau - 2\alpha(1 - 2\sin^2(\frac{\xi h}{2}))] - i(1 - \theta)\beta(1 - q)\sin(\xi h)}{1 + \theta[2\alpha + qd\tau - 2\alpha(1 - 2\sin^2(\frac{\xi h}{2}))] + i\theta\beta(1 - q)\sin \xi h}$$

$$|A(\xi)|^2 = \frac{1 - 2(1 - \theta)(qd\tau + 4\alpha \sin^2(\frac{\xi h}{2})) + (1 - \theta)^2(qd\tau + 4\alpha \sin^2(\frac{\xi h}{2}))^2 + \beta^2(1 - \theta)^2(1 - q)^2 \sin^2 \xi h}{1 + 2\theta(qd\tau + 4\alpha \sin^2(\frac{\xi h}{2})) + \theta^2(qd\tau + 4\alpha \sin^2(\frac{\xi h}{2}))^2 + \beta^2\theta^2(1 - q)^2 \sin^2 \xi h}$$

$$|A(\xi)|^2 - 1 = \frac{-2(qd\tau + 4\alpha \sin^2(\frac{\xi h}{2})) + (1 - 2\theta)(qd\tau + 4\alpha \sin^2(\frac{\xi h}{2}))^2 + \beta^2(1 - 2\theta)(1 - q)^2 \sin^2 \xi h}{1 + 2\theta(qd\tau + 4\alpha \sin^2(\frac{\xi h}{2})) + \theta^2(qd\tau + 4\alpha \sin^2(\frac{\xi h}{2}))^2 + \beta^2\theta^2(1 - q)^2 \sin^2 \xi h}$$

$$|A(\xi)|^2 - 1 = \frac{-2(qd\tau + 4\alpha \sin^2(\frac{\xi h}{2})) + (1 - 2\theta)[\beta^2(1 - q)^2 \sin^2 \xi h + (qd\tau + 4\alpha \sin^2(\frac{\xi h}{2}))^2]}{1 + 2\theta(qd\tau + 4\alpha \sin^2(\frac{\xi h}{2})) + \theta^2(qd\tau + 4\alpha \sin^2(\frac{\xi h}{2}))^2 + \beta^2\theta^2(1 - q)^2 \sin^2 \xi h}$$

$|A(\xi)|^2 - 1 \leq 0$ si et seulement si :

$$(1 - 2\theta)[\beta^2(1 - q)^2 \sin^2 \xi h + (qd\tau + 4\alpha \sin^2(\frac{\xi h}{2}))^2] \leq 0 \quad (2.14)$$

ou

$$-2(qd\tau + 4\alpha \sin^2(\frac{\xi h}{2})) + (1 - 2\theta)[\beta^2(1 - q)^2 \sin^2 \xi h + (qd\tau + 4\alpha \sin^2(\frac{\xi h}{2}))^2] \leq 0 \quad (2.15)$$

L'inéquation (2.14) revient à :

$$1 - 2\theta \leq 0$$

pour $\theta \geq \frac{1}{2}$ on a $|A(\xi)|^2 - 1 \leq 0$.

par conséquent, le schéma numérique est inconditionnellement stable pour $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Dans le cadre notre travail, nous utiliserons $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Conclusion : puisque ce schéma numérique est consistant, le theoreme de LAX stipule que la stabilité est équivalente à la convergence de la solution.

2.4 Résultats numériques et discussions

Désignons par C_{ex} la valeur du call exacte et par C_{app} la valeur du call approchée. Nous évaluons l'erreur par la métrique suivante :

$$E_r = \sqrt{\frac{\frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N (C_{ex}(S_i, 0) - C_{app}(S_i, 0))^2}{\frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N (C_{ex}(S_i, 0))^2}}$$

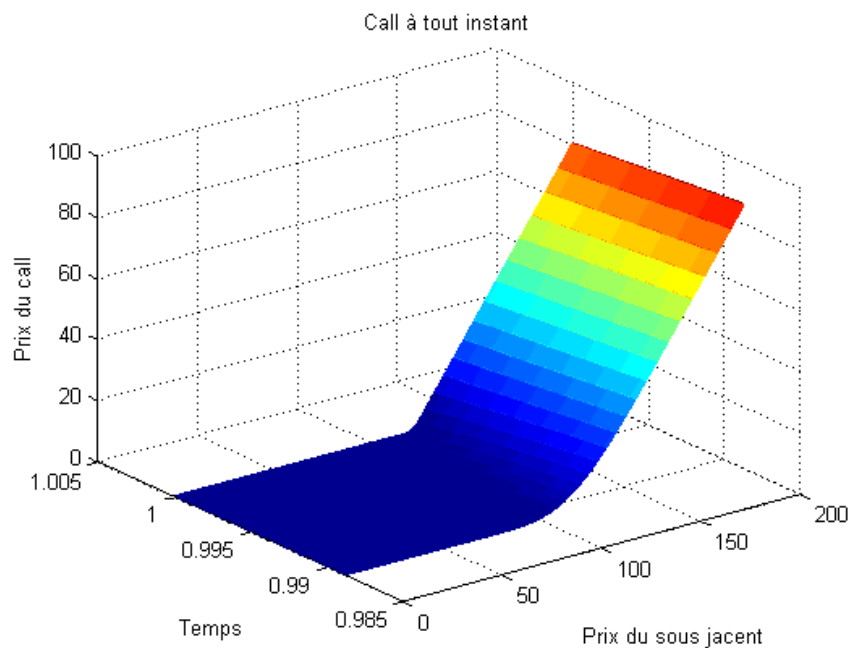


FIGURE 2.2 – Prix d’une option d’achat européenne en fonction du temps et du prix du sous jacent à tout instant pour $S_{max} = 200$, $K = 120$, $\sigma = 0.15$, $r = 0.05$, $N = 300$, $M = 200$ et $T = 1$

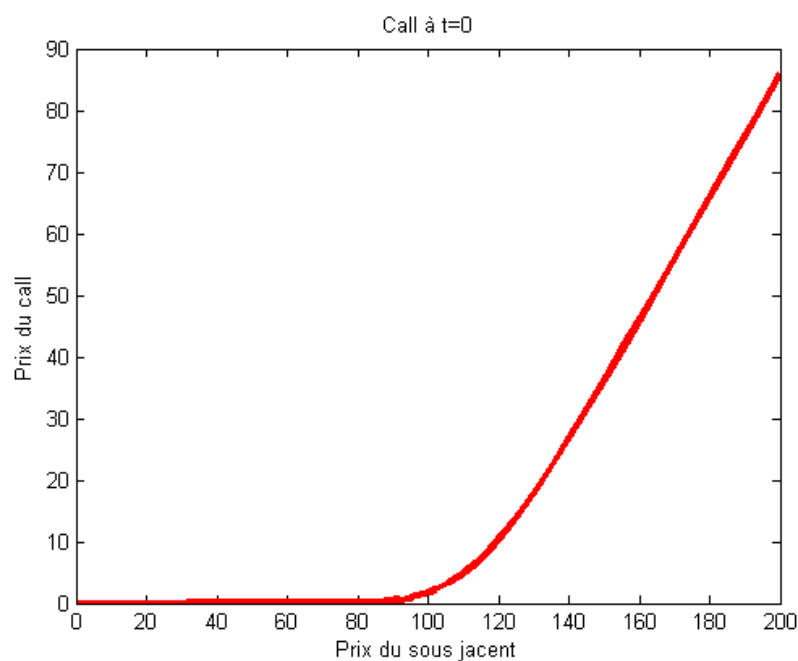


FIGURE 2.3 – Prix d’une option d’achat européenne en fonction du prix du sous jacent lorsque $t=0$ pour $S_{max} = 200$, $K = 120$, $\sigma = 0.15$, $r = 0.05$, $N = 300$, $T = 1$ et $M = 200$.

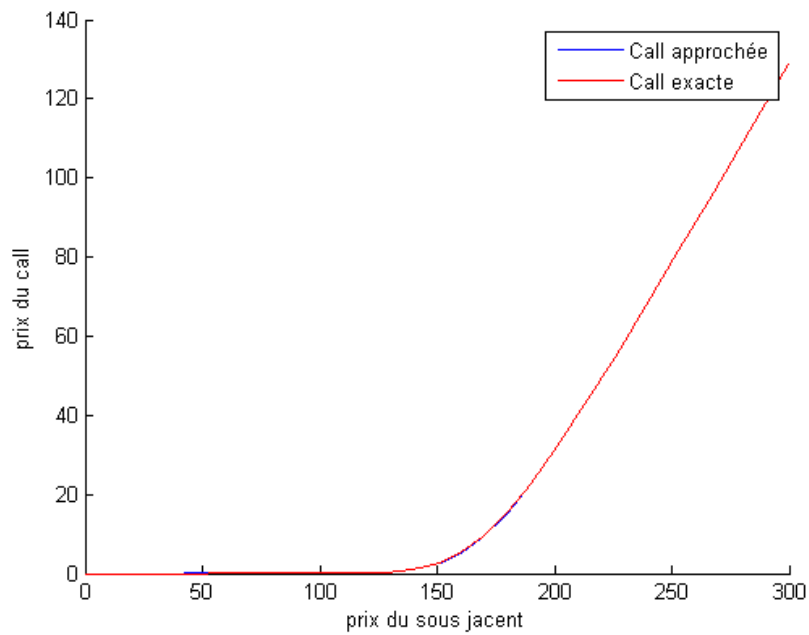


FIGURE 2.4 – Call approché et Call exacte pour $S_{max} = 300, K = 180, \sigma = 0.15, r = 0.05, N = 300; M = 200$ et $T = 1$.

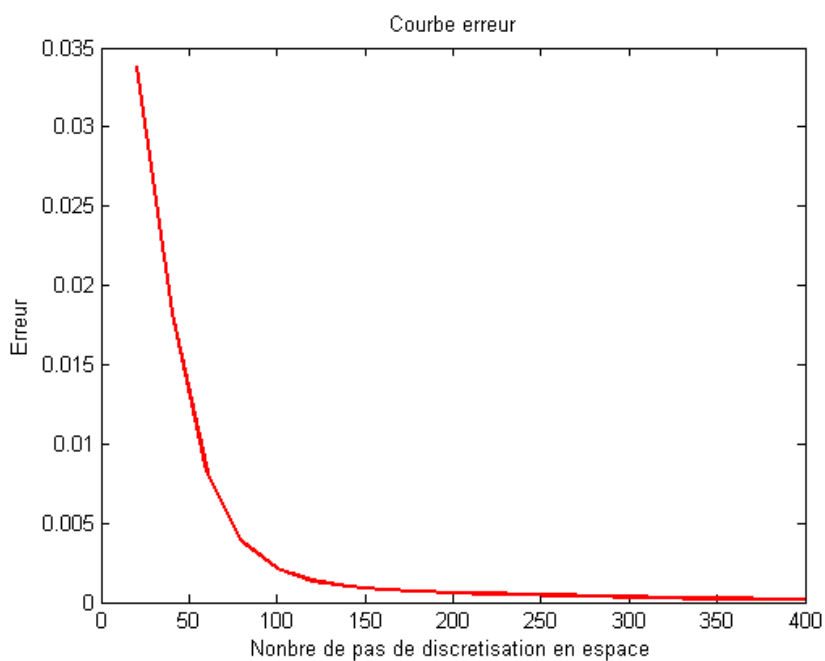


FIGURE 2.5 – Erreur en fonction du nombre de points de discretisation en espace pour $S_{max} = 200, K = 120, \sigma = 0.15, r = 0.05, M = 100$ et $T = 1$.

Discussion

★ Les figures (2.2) et (2.3) confirment le fait que nous avons bien implémenté un call Européen car la courbe est croissante en fonction de S_t ce qui est vraie vu la forme du payoff.

★ Sur la figure (2.4), nous remarquons que le call approché et le call exacte sont presque confondus, ce qui est normal car la solution numérique n'a aucun défaut puisque tous les coefficients sont constant.

★ La figure (2.5) L'on remarque, que l'erreur est décroissante au fur et à mesure que le pas de discrétisation en espace devient petit. Ce qui confirme le faite que la solution numérique converge vers la solution exacte.

Au cours de ce chapitre, nous avons formulé, résolu et présenté les résultats numériques obtenus pour l'évaluation d'une option Européenne avec le modèle de Black et Scholes. Ce modèle suppose que le cours du sous-jacent suit un processus de diffusion continue dans le temps, ce qui est en contradiction avec la réalité, puisque le cours du sous-jacent peut présenter des sauts inattendus de temps en temps suite à la survenance des évènements inattendus. Non seulement les sauts ne sont pas incorporés dans la partie diffusion, mais, en plus, ils sont en contradiction avec la couverture en continue, puisque ces sauts surviennent de manière aléatoire et continue.

ETUDE DU MODELE DE MERTON

Dans ce modèle nous étudions un marché financier continu dans lequel sont échangés deux actifs risqués. Ici, le portefeuille est risqué malgré l'élimination du risque de diffusion. Le modèle de Black et Scholes bien que usuel, ne reflète pas les réalités du marché. Ainsi, Merton a intégré la composante saut dans la description d'un actif financier.

Dans ce chapitre, nous présenterons les hypothèses et l'équation de Merton. Nous faisons une étude numérique dudit modèle.

3.1 Cadre, hypothèses et formulation du modèle

3.1.1 Cadre et hypothèses du modèle

Les prix des actifs financiers présentent des sauts qui sont souvent le résultat d'une mise à jour des prix suite à la révélation d'informations importantes. Ainsi, Merton propose un modèle mathématique du marché financier dans lequel l'évolution du prix de l'actif se compose d'une partie continue (diffusion) et d'une partie discontinue (saut). Les hypothèses ([4],[5]) du modèle sont :

H1) Absence des coûts de transaction.

H2) Vente à découvert autorisées.

H3) Absence d'opportunité d'arbitrage.

H4) Aucune dividende versé par l'actif risqué.

H5) Entre deux temps de saut, le prix S_t suit le modèle de Black et Scholes.

H6) η la taille du saut est une variable aléatoire non-négative. Elle est i.i.d de loi lognormale de moyenne $e^{\mu + \frac{1}{2}\delta^2}$ et de variance $e^{2\mu + \delta^2}(e^{\delta^2} - 1)$.

H7) Dans un intervalle de temps petit (dt), le prix de l'actif passe de S_t à ηS_t .

H8) On représente la composante saut par un processus de poisson composé, elle suit une loi lognormale.

H9) Nous couvrons uniquement le risque causé par la partie diffusion.

H10) Le comportement de saut des actifs n'est pas lié à l'ensemble du marché.

Considérons un portefeuille constitué d'un actif risqué, d'un actif non risqué et d'un produit dérivé.

♣ **Un actif risqué** en position courte de valeur initiale $S_0 > 0$ connu : donc la dynamique en accord avec les hypothèses H5) et H7) est :

$$dS_t = (\mu - \lambda k)S_t dt + \sigma S_t dW_t + (\eta - 1)S_t dN_t \quad (3.1)$$

où :

μ est un paramètre réel c'est le taux de rendement de l'actif risqué, $\sigma > 0$ est la volatilité de l'actif risqué, $(W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien de loi $\mathcal{N}(0, t)$, N_t est le processus de poisson d'intensité λ , $(\eta - 1)$ est la variation en pourcentage de la variable prix (c'est l'amplitude du saut faisant passer de ηS_t à S_t s'il y'a un saut en t) et $k = E(\eta - 1)$. Les processus (W_t) , (N_t) et (η) sont indépendants. Le processus saut suit une loi lognormale de densité $g(\eta) = \frac{1}{\delta \eta \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln \eta - \mu)^2}{2\delta^2}}$.

Ici, le rendement instantané est dû à trois contributions :

- la première $(\mu - \lambda k)dt$ est déterministe et prévisible. On ajuste μ de $-\lambda k$ parcequ'on voudrait que l'actif risqué nous rapporte exactement (le rendement instantané).
- la seconde, σdW_t représente la variation aléatoire du prix de l'actif due à des effets externes comme de nouvelles inattendues.
- La troisième, $(\eta - 1)dN_t$ est la variation de l'amplitude du saut.

En appliquant le Lemme d'Ito généralisé pour les processus de saut-diffusion, la solution de (3.1) est $S_t = S_0 \exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda k)t + \sigma B_t + \prod_{i=1}^{N_t} \eta_i)$. voir [4]

♣ **Un actif sans risque** de valeur S_t^0 en t, de dynamique : $dS_t^0 = rS_t^0 dt$. Ici, le rendement instantané n'est dû qu'à la partie déterministe. où $r > 0$ est une constante appelé taux d'intérêt sur le marché des placements sans risque. Ainsi la valeur à t est : $S_t^0 = S_0^0 \exp(rt)$ où $S_0^0 = 1$ (sans nuire à la généralité).

♣ **Produit dérivé (le call)** en position longue avec un prix d'exercice K et une maturité T vérifiant $C(S, T) = \max(S_T - K, 0)$.

Après avoir donné les hypothèses du modèle formulons maintenant l'équation.

3.1.2 Formulation de l'équation

La valeur de notre portefeuille à tout instant est :

$$\pi_t = C_t - \Delta_t S_t \quad (3.2)$$

La condition autofinancement exige que la valeur du portefeuille change dans un court intervalle de temps :

$$d\pi_t = dC_t - \Delta_t dS_t \quad (3.3)$$

En appliquant le Lemme d'Ito pour les processus saut diffusion à C_t et en remplaçant dS_t de (3.1) et dC_t dans (3.3) nous obtenons :

$$\begin{aligned} d\pi_t = & \left(\frac{\partial C_t}{\partial t} + (\mu - \lambda k)S_t \frac{\partial C_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} - \Delta_t(\mu - \lambda k)S_t \right) dt + \\ & rS_t \left(\frac{\partial C_t}{\partial S_t} - \Delta_t \right) dB_t + (C(\eta S_t, t) - S_t \Delta_t(\eta - 1) - C_t) dN_t \end{aligned} \quad (3.4)$$

comme (H9) stipule que : $\Delta_t = \frac{\partial C_t}{\partial S_t}$, alors (3.4) devient :

$$d\pi_t = \left(\frac{\partial C_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} \right) dt + (C(\eta S_t, t) - \frac{\partial C_t}{\partial S_t} S_t(\eta - 1) - C_t) dN_t \quad (3.5)$$

L'hypothèse (H10) et (H3) nous donne $dE(\pi_t) = rE(\pi_t)dt$, c-a-d, $E(d\pi_t) = E(r\pi_t dt)$.

En remplaçant π_t de (3.2) et $d\pi_t$ de (3.5) dans l'expression ci dessus nous obtenons :

$$\left(\frac{\partial C_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} \right) dt + E((C(\eta S_t, t) - \frac{\partial C_t}{\partial S_t} S_t(\eta - 1) - C_t) dN_t) = r(C_t - \frac{\partial C_t}{\partial S_t} S_t) dt$$

sachant que η et N_t sont indépendants et $E(dN_t) = \lambda dt$, l'équation précédente devient

$$\frac{\partial C_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} + (r - \lambda k)S_t \frac{\partial C_t}{\partial S_t} - (r + \lambda)C_t + \lambda E(C(\eta S_t, t)) = 0$$

On obtient l'équation de Merton :

$$\frac{\partial C_t}{\partial t} + (r - \lambda k)S_t \frac{\partial C_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} - (r + \lambda)C_t + \lambda \int_0^\infty C(\eta S_t, t) g(\eta) d\eta = 0$$

Le système à résoudre est

$$\begin{cases} \frac{\partial C_t}{\partial t} + (r - \lambda k)S_t \frac{\partial C_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} + \lambda \int_0^\infty C(\eta S_t, t) g(\eta) d\eta = (r + \lambda)C_t, \\ C(S_T, T) = \max(S_T - K, 0), \\ C(0, t) = 0, \quad C(S_{max}, t) = S_{max} - K \exp(-r(T - t)), \\ S_t \in \mathbb{R}_+, t \in [0, T], \end{cases} \quad (3.6)$$

Remarque 2 – La condition initiale ne diffère pas de celle de Black et Scholes car nous évaluons toujours une option Européenne.

– Les conditions aux frontières ne changent pas aussi car elles proviennent de la relation parité call-put pour les options du type Européen.

La solution exacte [3] de ce système d'équation est donnée par :

$$C(S, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda'(T-t)} \frac{(\lambda'(T-t))^n}{n!} C_{BS}(S, t, \sigma_n, r_n)$$

où $\lambda' = \lambda(1+k)$; $\sigma_n^2 = \sigma^2 + \frac{n\delta^2}{T-t}$; $r_n = r - \lambda k + \frac{n \ln(1+k)}{T-t}$ et C_{BS} est le prix dans le modèle Black et Scholes sans saut.

Nous avons obtenu une intégral-différentielle à coefficients variables. Pour la résoudre numériquement, nous la transformons en effectuant un changement de variable.

3.2 Transformation de l'équation

Chaque fois que C est différencié par S , elle est aussi multiplié par S en donnant les coefficients non constants. Nous effectuerons des changements de variable en S pour rendre les coefficients constants, et en t pour changer l'origine du temps.

3.2.1 Changement de variables

Effectuons les changements de variables en introduisant x , τ et y , définir par le système

$$\begin{cases} S_t = S_0 e^x \\ \eta = e^y \\ t = (T - \tau) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln S_t - \ln S_0 \\ y = \ln \eta \\ \tau = (T - t) \end{cases}$$

Ainsi, $d\eta = e^y dy$.

$$\text{Ainsi le domaine : } \begin{cases} t \in [0, T] \\ S_t \in [0, \infty[\\ \eta \in [0, \infty[\end{cases} \text{ devient : } \begin{cases} \tau \in [0, T] \\ x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} .$$

on obtient donc la nouvelle fonction $v = \frac{S_0}{C}$.

Intépretation :

Le 1^{er} changement de variable stipule qu'on quitte du domaine des prix représenté par S_t au domaine des rendements représenté par x .

Le 2^{eme} changement est une conséquence du 1^{er} changement.

Le 3nd changement de variable stipule que nous n'évaluons plus le temps depuis l'origine mais le temps qui reste à parcourir jusqu'à l'échéance.

3.2.2 Nouveau système d'équation

Le calcul des dérivées en laissant les indices temporelles nous donne :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t} = \left(-\frac{\partial C}{\partial \tau}\right), \quad \frac{\partial C}{\partial S} = \frac{\partial C}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial S} = \left(\frac{1}{S}\right) \cdot \frac{\partial C}{\partial x}$$

et

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial C}{\partial S}\right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial C}{\partial S}\right) \frac{\partial x}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{S_0} \exp(-x) \frac{\partial C}{\partial x}\right) \frac{1}{S} = \frac{1}{S^2} \left(-\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right)$$

En remplaçant dans l'équation de Merton, nous obtenons :

$$-\frac{\partial C}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \sigma^2 \left(-\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right) + (r - \lambda k) \frac{\partial C}{\partial x} + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} C(e^{y+x}, T - \tau) f(y) dy = (r + \lambda) C$$

où $f(y) = g(e^y) e^y$

En remplaçant C par $S_0 v$ est en réorganisant, nous obtenons :

$$S_0 \left(-\frac{\partial v}{\partial \tau} + \left(r - \lambda k - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} v(e^{y+x}, T - \tau) f(y) dy \right) = S_0 (r + \lambda) v$$

En simplifiant par S_0 , nous obtenons :

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} - \left(r - \lambda k - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (r + \lambda) v - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} v(e^{y+x}, T - \tau) f(y) dy = 0 \quad (3.7)$$

Introduisons la nouvelle fonction u en x définie par $u(x, \tau) = v(S_0 e^x, \tau)$. Ainsi, $v(S_0 e^{x+y}, \tau) = u(x + y, \tau)$. (3.7) nous donne

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \left(r - \lambda k - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (r + \lambda) u - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} u(y + x, \tau) f(y) dy = 0 \quad (3.8)$$

Pour résoudre numériquement cette équation, nous avons besoin

1. Condition initiale

Avec le changement de variable, la condition initiale devient $S_0 \cdot u(x, \tau = 0) = \max(S_0 \exp(x) - K, 0)$ d'où

$$u(x, \tau = 0) = \max(\exp(x) - \frac{K}{S_0}, 0). \quad (3.9)$$

2. Délimitation du domaine de x

Nous allons restreindre le domaine à un intervalle borné. Le domaine est choisi de façon à capturer le comportement global de l'option et de maintenir l'exactitude du prix de l'option. puisque $x = \ln(\frac{S}{S_0})$, alors $A_l = \ln(\frac{S_{\max}}{S_0})$ avec S_{\max} le prix de maximal l'actif. On a $x \in [-A_l, A_l]$, cela nous amène à spécifier les conditions aux bords.

3. Condition aux frontières

Comme $C(S=0, t)=0$ alors

$$u(x = -A_l, \tau) = 0. \quad (3.10)$$

Puisque $C(S = S_{\max}, t) = S_{\max} - K \exp(-r(T - t))$ on a

$$u(x, \tau) = \frac{1}{S_0} (S_0 \exp(x) - K \exp(-r(T - (T - \tau))))$$

alors

$$u(x = A_l, \tau) = \frac{1}{S_0} (S_0 \exp(A_l) - K \exp(-r\tau)). \quad (3.11)$$

4. Troncature de l'intégrale

Cela correspond à restreindre le domaine de l'intégration à un domaine fini $[B_l, B_r]$. La procédure consiste à choisir 2 valeurs finies telle que la différence entre l'intégrale aux bornes infinies et l'intégrale aux bornes finies soit inférieure à un seuil (précision), c-a-d,

$$f(y) \geq \epsilon \Leftrightarrow \mu - \sqrt{-2\delta^2 \ln(\epsilon\delta\sqrt{2\pi})} \leq y \leq \mu + \sqrt{-2\delta^2 \ln(\epsilon\delta\sqrt{2\pi})}$$

$$\text{avec } f(y) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\delta^2}},$$

alors

$$B_l = \mu - \sqrt{-2\delta^2 \ln(\epsilon\delta\sqrt{2\pi})} \quad \text{et} \quad B_r = \mu + \sqrt{-2\delta^2 \ln(\epsilon\delta\sqrt{2\pi})}. \quad (3.12)$$

L'opérateur L étant non local, le calcul du terme intégral pour $x \in [-A_l, A_l]$ nécessite la connaissance de $u(\cdot, \tau)$ sur $\{x + y | y \in \text{supp}f\}$. Ainsi, nous divisons le terme intégrale en deux parties :

$$\int_{y \in \mathbb{R}} u(x + y, \tau) f(y) dy = \int_{y \in [B_l, B_r]} u(x + y, \tau) f(y) dy + \int_{y \notin [B_l, B_r]} u(x + y, \tau) f(y) dy \quad (3.13)$$

Pour $\epsilon > \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi} \exp(\frac{(A_l - |\mu|)^2}{2\delta^2})}$, $[B_l, B_r] \subseteq [-A_l, A_l]$. $u(x + y, \tau) = 0$ pour $x + y \notin [-A_l, A_l]$.

Ainsi (3.9), (3.10), (3.11), (3.12) et (3.13) transforme le système (3.6) en :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau} = (r - \lambda k - \frac{1}{2}\sigma^2) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (r + \lambda)u + \lambda \int_{B_l}^{B_r} u(x + y, \tau) f(y) dy \\ u(x + y, \tau) = 0 \quad x + y \notin [-A_l, A_l] \quad \text{et} \quad \tau \in [0, T] \\ u(x, \tau = 0) = \max(\exp x - \frac{K}{S_0}, 0) \\ u(x = -A_l, \tau) = 0 \\ u(x = A_l, \tau) = e^{A_l} - \frac{K}{S_0} e^{-r\tau} \\ x \in [-A_l, A_l] \quad \text{et} \quad \tau \in [0, T] \end{cases} \quad (3.14)$$

On a donc transformé l'équation de Merton en une équation plus simple à résoudre avec les conditions du type Dirichlet.

3.3 Résolution numérique

Nous allons transformer cette E.D.P. pour faciliter sa résolution numériquement, ensuite nous étudierons les erreurs de la méthode.

3.3.1 Discrétisation du système (3.14)

- **Discrétisation en espace** : On considère le segment $[-A_l, A_l]$, on fixe un nombre de points $N \in \mathbb{N}^*$ et on définit le pas de discrétisation spatiale

$$h = \frac{2A_l}{N}.$$

On définit également les points de discrétisation spatiale

$$x_i = ih, \quad i = 0, \dots, N$$

soit $(N+1)$ points de discrétisation spatiale.

- **Discrétisation en temps** : On subdivise le segment $[0, T]$ en $M \in \mathbb{N}^*$ intervalles équidistants de $d\tau$ tel que

$$d\tau = \frac{T}{M}.$$

On définit les points de discrétisation temporelle

$$\tau^n = nd\tau, n = 0, \dots, M$$

soit $(M+1)$ points de discrétisation temporelle.

- **Discrétisation du saut** : Pour cela, nous allons utiliser la règle de trapèze au même pas en espace en choisissant $[K_l, K_r]$ tel que $[B_l, B_r] \subset [(K_l - 0.5)h, (K_r + 0.5)h]$. Ainsi,

$$\begin{cases} (K_l - 0.5)h \leq B_l \\ (K_r + 0.5)h \geq B_r \end{cases} \quad \text{c-a-d} \quad \begin{cases} K_l \leq \frac{B_l}{h} + 0.5 & \text{a} \\ K_r \geq \frac{B_r}{h} - 0.5 & \text{b} \end{cases}$$

On note, $F(x)$ =partie entière de x . K_r et K_l étant des entiers, on choisit $K_l = F(\frac{B_l}{h} + 0.5)$ vérifiant (a) et $K_r = F(\frac{B_r}{h} - 0.5) + 1$ vérifiant (b).

$$\int_{B_l}^{B_r} u(x_i + y, \tau) f(y) dy = \sum_{j=K_l}^{K_r} f_j u_{i+j}$$

avec $f_j = \int_{(j-\frac{1}{2})h}^{(j+\frac{1}{2})h} f(y) dy \simeq \frac{1}{2}h(f(y_{j-\frac{1}{2}}) - f(y_{j+\frac{1}{2}}))$.

- **Schéma numérique** : Nous utiliserons un schéma explicite-implicite, en traitant la partie intégrale explicite.

Pour :

$$\begin{cases} \tau = \tau^n & n = 0, \dots, M \\ x = x_i & i = 0, \dots, N \\ y = y_j & j = K_l, \dots, K_r \end{cases}$$

on a le schéma $\mathcal{A}_{d\tau, h}$

♣ Pour $(\frac{1}{2}\sigma^2 + \lambda k - r) < 0$

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{d\tau} &= (r - \lambda k - \frac{1}{2}\sigma^2) \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{h} + \frac{1}{2}\sigma^2 \left(\frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} \right) - \\ &\quad (r + \lambda)u_i^{n+1} + \lambda \sum_{j=K_l}^{K_r} f_j u_{i+j}^n \end{aligned}$$

♣ Pour $(\frac{1}{2}\sigma^2 + \lambda k - r) \geq 0$ on a :

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{d\tau} &= (r - \lambda k - \frac{1}{2}\sigma^2) \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{h} + \frac{1}{2}\sigma^2 \left(\frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} \right) - \\ &\quad (r + \lambda)u_i^{n+1} + \lambda \sum_{j=K_l}^{K_r} f_j u_{i+j}^n \end{aligned}$$

Remarque 3 lorsque $(\frac{1}{2}\sigma^2 - r - \lambda k) \geq 0$ on change l'approximation de la dérivée première en x pour que le schéma numérique soit inconditionnellement stable.

Le système discretisé dans le cas où $(\frac{1}{2}\sigma^2 + \lambda k - r) < 0$ est :

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{d\tau} = (r - \lambda k - \frac{1}{2}\sigma^2) \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{h} + \frac{1}{2}\sigma^2 \left(\frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} \right) - \\ (r + \lambda)u_i^{n+1} + \lambda \sum_{j=K_l}^{K_r} f_j u_{i+j}^n & 1 \leq i \leq N-1, \quad 1 \leq n \leq M \\ u_{i+j}^n = 0 & i+j \notin [1, N-1], \quad n \in [1, M] \\ u_i^0 = \max(e^{ih-A_i} - \frac{K}{S_0}, 0) & 0 \leq i \leq N \\ u_0^n = 0 & 0 \leq n \leq M \\ u_N^n = e^{A_i} - \frac{K}{S_0} e^{-rnd\tau} & 0 \leq n \leq M \end{cases}$$

3.3.2 Etude la consistance et stabilité du schéma numérique

Le but ici, est de prouver la convergence du schéma numérique.

1. Etude de la consistance :

L'erreur de troncature est l'erreur qui correspond à l'approximation d'un opérateur continue par un opérateur discret aux différences finies. La consistance d'un opérateur discret assure à celle-ci de pouvoir représenter exactement l'équation d'origine lorsque les pas de discrétisation tendent vers zéros.

Soit $u \in C^\infty([-A_i, A_i] * [0, T])$, nous allons montrer que

$$|\mathcal{A}_{d\tau, h}(u) - \mathcal{A}(u)| \rightarrow 0 \text{ quand } (d\tau, h) \rightarrow (0, 0) \text{ et } (\tau^n, x_i) \rightarrow (\tau, x).$$

posons $q = (r - \lambda k - \frac{1}{2}\sigma^2)$

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_{d\tau, h}(u) - \mathcal{A}(u)| &= \left| \frac{u(x_i, \tau^{n+1}) - u(x_i, \tau^n)}{d\tau} - \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} - \right. \\ & q \left(\frac{u(x_{i+1}, \tau^{n+1}) - u(x_i, \tau^{n+1})}{h} - \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \right) + (r + \lambda)(u(x_i, \tau^{n+1}) - u(x, \tau)) - \\ & \left. \frac{1}{2}\sigma^2 \left(\frac{u(x_{i+1}, \tau^{n+1}) - 2u(x_i, \tau^{n+1}) + u(x_{i-1}, \tau^{n+1})}{h^2} - \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2} \right) - \right. \\ & \left. \lambda \left(\sum_{j=K_l}^{K_r} f_j u(x_i + y_j, \tau^n) - \int_{B_l}^{B_r} u(x_i + y, \tau) f(y) dy \right) \right| \end{aligned}$$

En utilisant le développement de Taylor en (x_i, τ^n) on a :

$$u(x_i, \tau^{n+1}) = u(x_i, \tau^n) + d\tau \frac{\partial u(x_i, \tau^n)}{\partial \tau} + \frac{d\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_i, \xi_\tau)}{\partial \tau^2}$$

$$\left| \frac{u(x_i, \tau^{n+1}) - u(x_i, \tau^n)}{d\tau} - \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} \right| = \left| \frac{d\tau}{2} \frac{\partial^2 u(x_i, \xi_\tau)}{\partial \tau^2} \right| \leq \frac{d\tau}{2} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \right\|_\infty \rightarrow 0$$

avec $\xi_\tau \in]\tau^n, \tau^n + d\tau[$.

En appliquant le développement de Taylor en (x_i, τ^n) on a

$$u(x_{i+1}, \tau^{n+1}) = u(x_i, \tau^n) + h \frac{\partial u(x_i, \tau^{n+1})}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u(\xi_x^1, \tau^{n+1})}{\partial x^2}$$

or

$$\frac{\partial u(x_i, \tau^{n+1})}{\partial x} = \frac{\partial u(x_i, \tau^n)}{\partial x} + d\tau \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial u(x_i, \xi_\tau)}{\partial x}$$

d'où

$$\begin{aligned} |q(\frac{u(x_{i+1}, \tau^{n+1}) - u(x_i, \tau^{n+1})}{h} - \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x})| &= |q(d\tau \frac{\partial}{\partial \tau} (\frac{\partial u(x_i, \xi_\tau)}{\partial x}) + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u(\xi_x^1, \tau^{n+1})}{\partial x^2})| \\ &\leq q(d\tau \|\frac{\partial u}{\partial \tau}\|_\infty + \frac{h}{2} \|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\|_\infty) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

avec $\xi_x^1 \in]x_i, x_{i+1}[$.

En appliquant le développement de Taylor en (x_i, τ^n)

$$\begin{aligned} \frac{u(x_{i+1}, \tau^{n+1}) - 2u(x_i, \tau^{n+1}) + u(x_{i-1}, \tau^{n+1}))}{h^2} &= \frac{\partial^2 u(x_i, \tau^{n+1})}{\partial x^2} + \\ &\frac{h^2}{24} (\frac{\partial^4 u(\xi_x^2, \tau^{n+1})}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u(\xi_x^3, \tau^{n+1})}{\partial x^4}) \end{aligned}$$

or

$$\frac{\partial^2 u(x_i, \tau^{n+1})}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x_i, \tau^n)}{\partial x^2} + d\tau \frac{\partial}{\partial \tau} (\frac{\partial^2 u(x_i, \xi_\tau)}{\partial x^2})$$

d'où

$$\begin{aligned} |\frac{1}{2}\sigma^2(\frac{u(x_{i+1}, \tau^{n+1}) - 2u(x_i, \tau^{n+1}) + u(x_{i-1}, \tau^{n+1}))}{h^2} - \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2})| &= |\frac{1}{2}\sigma^2(d\tau \frac{\partial}{\partial \tau} (\frac{\partial^2 u(x_i, \xi_\tau)}{\partial x^2}) + \\ &\frac{h^2}{24} (\frac{\partial^4 u(\xi_x^2, \tau^{n+1})}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u(\xi_x^3, \tau^{n+1})}{\partial x^4}))| \\ &\leq \frac{1}{2}(\sigma^2 d\tau \|\frac{\partial u}{\partial \tau}\|_\infty + \frac{h^2}{24} \|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\|_\infty) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

avec $\xi_x^2 \in]x_i, x_{i+1}[$ et avec $\xi_x^3 \in]x_{i-1}, x_i[$.

En appliquant le développement de Taylor

$$u(x_i, \tau^{n+1}) = u(x_i, \tau^n) + d\tau \frac{\partial u(x_i, \xi_\tau)}{\partial \tau}$$

d'où

$$|(r + \lambda)(u(x_i, \tau^{n+1}) - u(x, \tau))| = |(r + \lambda)(d\tau \frac{\partial u(x_i, \xi_\tau)}{\partial \tau})| = d\tau \|\frac{\partial u}{\partial \tau}\|_\infty \rightarrow 0$$

En appliquant le développement Taylor en $(x_i + y, \tau^n)$

$$u(x_i + y_j, \tau^n) = u(x_i + y, \tau^n) + (y_j - y) \frac{\partial u(x_i + \xi_y, \tau^n)}{\partial x}$$

alors

$$|\lambda \sum_{j=K_l}^{K_r} \int_{(j-\frac{1}{2})h}^{(j+\frac{1}{2})h} (u(x_i + y_j, \tau^n) - u(x_i + y, \tau^n)) f(y) dy| =$$

$$\left| \lambda \sum_{j=K_l}^{K_r} \int_{(j-\frac{1}{2})h}^{(j+\frac{1}{2})h} (y_j - y) \frac{\partial u(x_i + \xi_y, \tau^n)}{\partial x} f(y) dy \right| \leq \lambda \frac{h}{2} \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{\infty} \rightarrow 0$$

par conséquent

$$|\mathcal{A}_{d\tau, h} - \mathcal{A}| \rightarrow 0 \text{ quand } (d\tau, h) \rightarrow 0 \text{ et } (\tau^n, x_i) \rightarrow (\tau, x)$$

En conclusion, ce schéma numérique est consistant avec l'équation de merton et est d'ordre 1 en temps et en espace.

2. Etude de la stabilité

La stabilité nous assure que, le schéma numérique consistant converge vers la solution exacte.

on écrit le système discretisé sous la forme

$$(1 + ad\tau)U_i^{n+1} - bd\tau U_{i+1}^{n+1} - cd\tau U_{i-1}^{n+1} = U_i^n + \sum_j f_j U_{i+j}^n \quad (3.15)$$

où

$$a = \frac{\sigma^2}{h^2} + \frac{1}{h}(r - \lambda k - \frac{1}{2}\sigma^2) + (r + \lambda) \geq 0$$

$$b = \frac{\sigma^2}{2h^2} + \frac{1}{h}(r - \lambda k - \frac{1}{2}\sigma^2) \geq 0$$

$$c = \frac{\sigma^2}{2h^2} \geq 0$$

On remarque, $a = b + c + (r + \lambda)$. Nous avons un système tridiagonale pour $\{U_0^{n+1}, \dots, U_N^{n+1}\}$ qui a une unique solution car la diagonale principale est dominante ($(1 + ad\tau) > bd\tau + cd\tau$).

On va montrer par récurrence

$$\forall n, \|U^n\| \leq \|h\|_{\infty} \quad (P_n)$$

– par définition, on a $\|U^0\| \leq \|h\|_{\infty}$. D'où (P_0) est vraie.

– Pour $n > 0$, montrons que (P_n) est vraie.

Par l'absurde, supposons $\|U^n\| \leq \|h\|_{\infty}$ et $\|U^{n+1}\| > \|h\|_{\infty}$ montrons que cela est impossible.

$\|U^{n+1}\| > \|h\|_{\infty}$ c'est à dire $\exists i_0 \in \{0, \dots, N\}$, tel que $|U_{i_0}^{n+1}| = \|U^{n+1}\|_{\infty}$ et $\forall i \in \mathbb{Z} \quad |U_i^{n+1}| \leq |U_{i_0}^{n+1}|$. Nous avons alors

$$\|U^{n+1}\|_{\infty} = |U_{i_0}^{n+1}| = -cd\tau|U_{i_0}^{n+1}| - bd\tau|U_{i_0}^{n+1}| + (1 + ad\tau)|U_{i_0}^{n+1}| - (r + \lambda)d\tau|U_{i_0}^{n+1}| \quad (3.16)$$

puisque

$$\begin{cases} |U_{i_0}^{n+1}| > |U_{i_0-1}^{n+1}| \Rightarrow -cd\tau|U_{i_0}^{n+1}| \leq -cd\tau|U_{i_0-1}^{n+1}| \\ |U_{i_0}^{n+1}| > |U_{i_0+1}^{n+1}| \Rightarrow -bd\tau|U_{i_0}^{n+1}| \leq -bd\tau|U_{i_0+1}^{n+1}| \\ |U_{i_0}^{n+1}| > \|h\|_{\infty} \Rightarrow -(r + \lambda)d\tau|U_{i_0}^{n+1}| \leq -(r + \lambda)d\tau\|h\|_{\infty} \end{cases}$$

alors (3.16) nous donne :

$$\begin{aligned} &\leq -cd\tau|U_{i_0-1}^{n+1}| - bd\tau|U_{i_0+1}^{n+1}| + (1 + ad\tau)|U_{i_0}^{n+1}| - (r + \lambda)d\tau\|h\|_\infty \\ &\leq | -cd\tau U_{i_0-1}^{n+1} - bd\tau U_{i_0+1}^{n+1} + (1 + ad\tau)U_{i_0}^{n+1}| - (r + \lambda)d\tau\|h\|_\infty \end{aligned}$$

En utilisant (3.15) on a :

$$\begin{aligned} &\leq |U_{i_0}^n + \lambda d\tau \sum_j f_j U_{i_0+j}^n| - (r + \lambda)d\tau\|h\|_\infty \\ &\leq (1 + \lambda d\tau)\|U^n\|_\infty - (r + \lambda)d\tau\|h\|_\infty \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse ($\|U^n\| \leq \|h\|_\infty$) on a

$$\begin{aligned} &\leq (1 + \lambda d\tau)\|h\|_\infty - (r + \lambda)d\tau\|h\|_\infty \\ &\leq (1 - rd\tau)\|h\|_\infty \\ &\leq \|h\|_\infty \end{aligned}$$

Ce qui contredit le fait que $\|U^{n+1}\| > \|h\|_\infty$ Donc

$$\|U^{n+1}\|_\infty \leq \|h\|_\infty$$

Par conséquent, (P_n) est vraie et ce schéma numérique est inconditionnellement stable.

3.4 Résultats numériques et discussion

Nous utilisons la même métrique pour l'erreur que celle utilisé dans le modèle de Black et Scholes.

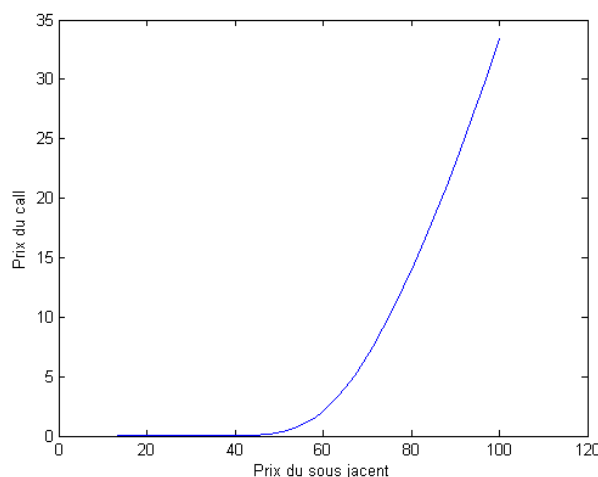


FIGURE 3.1 – Prix d'un call pour $\lambda = 1, S_{max} = 100, K = 70, \sigma = 0.15, r = 0.05, N = 300, M = 300, T = 1, \delta = 0.1$ et $\mu = -0.09$

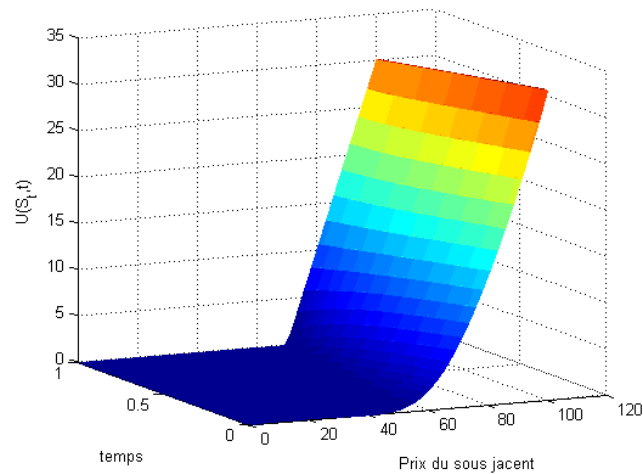


FIGURE 3.2 – Prix d'un call européenne en fonction du prix du sous jacent à tout instant pour $\lambda = 1, S_{max} = 100, K = 70, \sigma = 0.15, r = 0.05, N = 300, M = 300, T = 1, \delta = 0.1$ et $\mu = -0.09$.

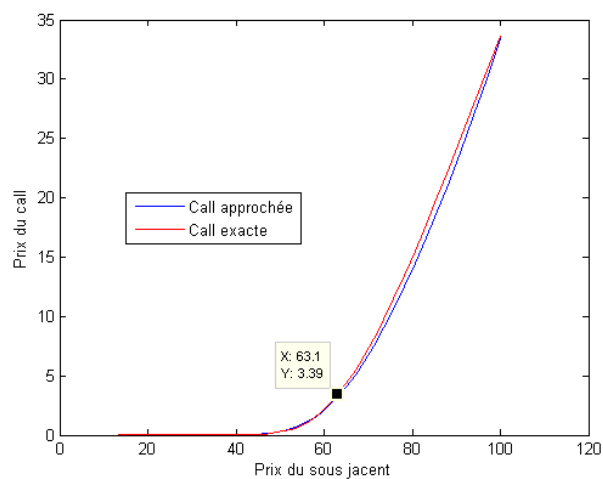


FIGURE 3.3 – Prix d'un call approché et d'un call exacte pour $\lambda = 1, S_{max} = 100, K = 70, \sigma = 0.15, r = 0.05, N = 300, M = 300, T = 1, \delta = 0.1$ et $\mu = -0.09$.

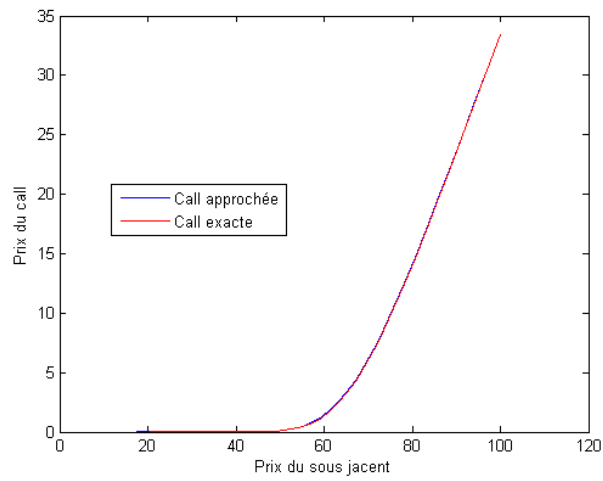


FIGURE 3.4 – Prix d'un call approché et d'un call exacte pour $\lambda = 0, S_{max} = 100, K = 70, \sigma = 0.15, r = 0.05, N = 300, M = 300, T = 1, \delta = 0.1$ et $\mu = -0.09$.

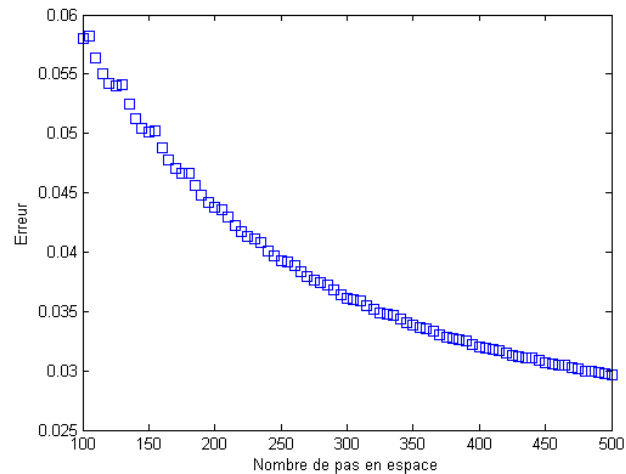


FIGURE 3.5 – Courbe de l'erreur en fonction du nombre de pas de discretisation en espace pour $\lambda = 1, S_{max} = 100, K = 70, \sigma = 0.15, r = 0.05, M = 300, T = 1, \delta = 0.1$ et $\mu = -0.09$.

Discussion

De la figure (3.1) à la figure (3.4) on observe une évolution du prix d'un call Européen en fonction du prix du sous-jacent.

★ Les figures (3.1) et (3.2) confirment le fait que nous avons implémenté un call européen car la valeur du call croît avec celle du sous-jacent.

★ La figure (3.3) présente l'évolution de valeur approchée et exacte du prix d'un call Européen à $t = 0$. Pour un prix du sous-jacent compris entre 0 et 63.1 les deux courbes sont confondues, après 63.1 la courbe du call exacte est au-dessus de celle du call approchée.

★ La figure (3.4) présente l'évolution du call à $t = 0$. Pour $\lambda = 0$, l'équation de Merton devient celle de Black et Scholes. Numériquement, on constate que les courbes sont confondues comme dans le cas de Black et Scholes.

★ sur la figure (3.5), l'erreur est décroissante au fur et à mesure que le pas de discrétisation en espace devient petit. Ce qui confirme le fait que la solution numérique converge vers la solution exacte.

Comparaison des deux modèles étudiés

Nous comparons le prix d'un Call dans le modèle de Black et Scholes et celui du Call dans le modèle de Merton pour une moyenne de saut variant de 0 à 50 et pour $S_{max} = 100$, $K = 70$, $\sigma = 0.15$, $r = 0.05$, $N = 300$, $M = 300$, $T = 1$, $\delta = 0.1$ et $\mu = -0.09$.

λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Black Scholes	6.9251	6.9251	6.9251	6.9251	6.9251	6.9251	6.9251	6.9251	6.9251
Merton	7.0498	7.5618	7.8544	8.0634	8.2341	8.3812	8.5103	8.6248	8.7266

λ	10	15	20	25	30	35	40	45	50
Black Scholes	6.9251	6.9251	6.9251	6.9251	6.9251	6.9251	6.9251	6.9251	6.9251
Merton	8.8987	9.1979	9.3805	9.4966	9.5725	9.6231	9.6572	9.6802	9.6956

La première ligne donne le nombre moyen de saut (λ), celle qui suit donne la valeur du call valorisé dans le modèle de Black et Scholes et la troisième ligne donne la valeur du call dans le modèle de Merton.

A l'analyse de ce tableau, nous remarquons que :

- Quel que soit la valeur de λ , le prix du call calculé dans le modèle de Black et Scholes ne varie pas dû au fait que λ n'intervient pas dans ce modèle.
- Le prix du call dans le modèle de Black et scholes est différent de celui calculé dans le modèle de Merton quand $\lambda=0$ du au fait que les schémas numériques utilisés sont différents.

- Le prix du call dans le modèle de Merton augmente avec la valeur de λ .
- Le Prix du call calculé dans le modèle de Merton est supérieur à celui calculé dans le modèle de Black et Scholes.

Dans ce chapitre, nous avons formulé, résolu et présenté les résultats numériques obtenus pour l'évaluation d'option Européenne avec le modèle de Merton qui suppose que l'évolution du prix de l'actif suit un processus de saut-diffusion avec une moyenne de saut finie. Nous avons aussi comparé les résultats obtenus pour le modèle de Black et Scholes et celui de Merton.

Conclusion et perspectives

Ce mémoire traite de la résolution numérique des équations d'évaluation pour une option Européenne, dans le modèle de Black et Scholes et celui de Merton par la méthode des différences finies.

Nous avons rappelé les prérequis en finance, en mathématique et sur la méthode des différences finies.

Après avoir formulé l'équation de Black et Scholes, nous l'avons résolu en utilisant le θ -schéma. Nous avons montré que ce schéma numérique était consistant et inconditionnellement stable pour $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Après avoir formulé l'équation de Merton, nous l'avons résolue numériquement en utilisant le schéma explicite-implicite. Nous avons montré que ce schéma numérique était consistant et inconditionnellement stable.

Les résultats numériques obtenus pour les deux modèles ont permis de conclure que nous avons implémenté un call dans chaque cas et que notre solution approchée approxime la solution exacte.

De plus, on a remarqué que le modèle de Black et Scholes sous-évalue le prix des call Européens.

Pour les études ultérieures, il serait intéressant d'étudier numériquement le modèle de Merton et d'autres modèles d'évaluation des options tels que le modèle Variance Gamma où la moyenne des sauts est infinie à l'aide des méthodes Spectrales.

Annexes

Condition de frontière

Pour déterminer la condition $C(S_{max}, t) = S_{max} - K \exp(-r(T - t))$, on utilise la relation call-put que nous avons énoncé dans le chapitre 1. Ici, cette relation est écrite à tout instant.

$$C^c + K \exp(-r(T - t)) = C^p + S$$

où : C^c est la valeur du call et C^p celle du put
lorsque $S \rightarrow \infty$, $C^p = 0$ alors

$$C^c = S_{\infty} - K \exp(-r(T - t))$$

Programme matlab pour Black Scholes

Calcul de la solution exacte et approchée

```
clear all;clc;
%N nbre de pas de subdivision en espace
%M nbre de pas de subdivision en temps
% Smax longueur total d'espace
% T maturité longueur total en temps
% h pas de subdivision en espace
% dt pas de subdivision en temps

S0 = 1; Smax = 20; T = 1; N = 100; M = 100; K = 12; sigma = 0.15; d =
log(Smax/S0); h = (2 * d)/N; dtho = ((sigma^2) * T)/(2 * M); r = 0.05; theta = 2/3; q =
(2 * r)/(sigma^2); alpha = dtho/(h^2); beta = dtho/h;

a = 1 + 2 * alpha * theta + q * dtho * theta;
b = -alpha * theta + 0.5 * (1 - q) * beta * theta;
c = -alpha * theta - 0.5 * (1 - q) * beta * theta;
a1 = 1 - 2 * alpha * (1 - theta) - q * dtho * (1 - theta);
b1 = alpha * (1 - theta) - 0.5 * (1 - q) * beta * (1 - theta);
c1 = alpha * (1 - theta) + 0.5 * (1 - q) * beta * (1 - theta);

%*****
% construction de la matrice A
```

```

    e=1;
    A=zeros(N-1,N-1);
    A(1,1)=a; A(1,2)=b; A(N-1,N-2)=c; A(N-1,N-1)=a;
    for i=2 :N-2
    A(i,e)=c; A(i,e+1)=a; A(i,e+2)=b;
    e=e+1;
    end

    % *****
    % construction de la matrice B

    k=1;
    B=zeros(N-1,N-1);
    B(1,1)=a1; B(1,2)=b1; B(N-1,N-2)=c1; B(N-1,N-1)=a1;
    for i=2 :N-2
    B(i,k)=c1; B(i,k+1)=a1; B(i,k+2)=b1;
    k=k+1;
    end

    %soit U la matrice solution
    U=zeros(M+1,N+1);

    %*****
    %initialisation à tho=0

    for i=1 :N+1
    x=(i-1)*h-d;
    U(1,i)=max(0,exp(x)-K/S0);
    end

    %*****
    %condition au frontiere

    U(:,1)=zeros(M+1,1);
    for i=1 :M+1
    tho=(i-1)*dtho;
    U(i, N + 1) = (1/S0) * (Smax - K * exp((-2 * tho * r)/(sigma^2)));
    end

    for i=2 :M+1
    A0=zeros(N-1,1);A0(1)=c*U(i,1);
    A0(N-1)=b*U(i,N+1);
    B0=zeros(N-1,1);B0(1)=c1*U(i-1,1);
    B0(N-1)=b1*U(i-1,N+1);
    U(i,2 :N)=(inv(A)*(B*(U(i-1,2 :N))'+B0-A0))';
    end

```

```

%*****
%changement de variables
S=zeros(1,N+1);t=zeros(1,M+1);
for i=1 :N+1
x=(i-1)*h-d;
S(i)=S0*exp(x);
end
for i=1 :M+1
t(i)=T-(i-1)*dtho;
end

%*****
% solution exacte
%*****

d1 = (log(S./K) + (r + 0.5 * sigma.^2) .* T)./(sigma .* sqrt(T));
d2 = (log(S./K) + (r - 0.5 * sigma.^2) .* T)./(sigma .* sqrt(T));
N1 = 0.5 * erfc(-d1./sqrt(2));
N2 = 0.5 * erfc(-d2./sqrt(2));
CexBS = S .* N1 - K .* exp(-r .* T) .* N2;

```

Calcul de l'erreur

```

functionERR = ERREURBSflo(vectN)taille = size(vectN);
ERR = zeros(taille(1),taille(2));
forl = 1 : max(taille)
ERR(l) = BSCALL(vectN(l));
end
functionE = BSCALL(N)
% N nbre de pas de subdivision en espace
% M nbre de pas de subdivision en temps
% Smax longueur total d'espace
% T maturité longueur total en temps
% h pas de subdivision en espace
% dt pas de subdivision en temps
S0 = 1; Smax = 20; T = 1; M = 100; K = 12; sigma = 0.15; d = log(Smax/S0); h =
(2*d)/N; dtho = ((sigma^2)*T)/(2*M); r = 0.05; theta = 2/3; q = (2*r)/(sigma^2); alpha =
dtho/(h^2); beta = dtho/h;

a = 1 + 2 * alpha * theta + q * dtho * theta;
b = -alpha * theta + 0.5 * (1 - q) * beta * theta;
c = -alpha * theta - 0.5 * (1 - q) * beta * theta;
a1 = 1 - 2 * alpha * (1 - theta) - q * dtho * (1 - theta);
b1 = alpha * (1 - theta) - 0.5 * (1 - q) * beta * (1 - theta);

```

```
c1 = alpha * (1 - theta) + 0.5 * (1 - q) * beta * (1 - theta);
```

```
% construction de la matrice A
e=1;
A=zeros(N-1,N-1);
A(1,1)=a; A(1,2)=b; A(N-1,N-2)=c; A(N-1,N-1)=a;
for i=2 :N-2
A(i,e)=c; A(i,e+1)=a; A(i,e+2)=b;
e=e+1;
end
```

```
k=1;
B=zeros(N-1,N-1);
B(1,1)=a1; B(1,2)=b1; B(N-1,N-2)=c1; B(N-1,N-1)=a1;
for i=2 :N-2
B(i,k)=c1; B(i,k+1)=a1; B(i,k+2)=b1;
k=k+1;
end
```

```
%soit U la matrice solution
U=zeros(M+1,N+1);
%initialisation à tho=0
for i=1 :N+1
x=(i-1)*h-d;
U(1,i)=max(0,exp(x)-K/S0);
end
```

```
%*****
%condition au frontiere
```

```
U(:,1) = zeros(M + 1, 1);
for i = 1 : M + 1
tho = (i - 1) * dtho;
U(i, N + 1) = (1/S0) * (Smax - K * exp((-2 * tho * r)/(sigma^2)));
end
```

```
for i = 2 : M + 1
A0 = zeros(N - 1, 1); A0(1) = c * U(i, 1);
A0(N - 1) = b * U(i, N + 1);
B0 = zeros(N - 1, 1); B0(1) = c1 * U(i - 1, 1);
B0(N - 1) = b1 * U(i - 1, N + 1);
U(i, 2 : N) = (inv(A) * (B * (U(i - 1, 2 : N))' + B0 - A0))';
end
```

```
%*****
%changement de variables
```



```

S=zeros(1,N+1);t=zeros(1,M+1);
for i=1 :N+1
x=(i-1)*h-d;
S(i)=S0*exp(x);
end
for i=1 :M+1
t(i)=T-(i-1)*dtho;
end

%*****
% solution exacte
%*****

d1 = (log(S./K) + (r + 0.5 * sigma.^2) * T)./(sigma * sqrt(T)); d2 = (log(S./K) +
(r - 0.5 * sigma.^2) * T)./(sigma * sqrt(T)); N1 = 0.5 * erfc(-d1./sqrt(2)); N2 =
0.5 * erfc(-d2./sqrt(2)); CexBS = S * N1 - K * exp(-r * T) * N2;
E=erreur();
function E = erreur()
S1 = (CexBS - U(M + 1, :)).^2; S2 = CexBS.^2;
sum1 = 0; sum2 = 0;
for j = 1 : N + 1
sum1 = S1(j) + sum1;
sum2 = S2(j) + sum2;
end
sum1 = sum1/(N + 1); sum2 = sum2/(N + 1);
E = sqrt(sum1/sum2);
end

end
end

```

Programme Merton

```

clear all;clc;
%N :nombre de pas dans l'espace
%M :nombre de pas dans le temps
sigma = 0.15; delta = 0.1; r = 0.05; lamda = 0.1; mu = -0.09; S0 = 1; eps = 0.0001; M =
100; N = 100; T = 1; Smax = 100; K = 70; k = exp(mu + 0.5 * ((delta)^2)) - 1; Ar =
log(Smax/S0); Al = -Ar; bsup = mu + sqrt(-2 * ((delta)^2) * log(eps * delta * sqrt(2 *
pi))); binf = mu - bsup; dx = 2 * Ar/N; dt = T/M; q = lamda * k - r + (((sigma)^2)/2);

if(q < 0)
a = (((sigma)^2)/((dx)^2)) + ((r - lamda * k - 0.5 * (sigma)^2) * (1/dx)) + (r + lamda);
b = 0.5 * (((sigma)^2)/((dx)^2)) + ((r - lamda * k - 0.5 * (sigma)^2) * (1/dx));
c = 0.5 * (((sigma)^2)/((dx)^2));

```

```

else
a = (((sigma)^2)/((dx)^2)) - ((r - lamda * k - 0.5 * (sigma)^2) * (1/dx)) + (r + lamda);
b = 0.5 * (((sigma)^2)/((dx)^2));
c = 0.5 * (((sigma)^2)/((dx)^2)) - ((r - lamda * k - 0.5 * (sigma)^2) * (1/dx));
end
gamma = -c * dt; alpha = (1 + a * dt); beta = -b * dt;

%*****
% construction de la matrice A

A = zeros(N - 1, N - 1);
A(1, 1) = alpha; A(1, 2) = beta; A(N - 1, N - 2) = gamma; A(N - 1, N - 1) = alpha;
p = 1;
for i = 2 : N - 2
A(i, p) = gamma; A(i, p + 1) = alpha; A(i, p + 2) = beta;
p = p + 1;
end

%soit U la matrice solution
U=zeros(M+1,N+1);

% initialisation à tho=0
for i=1 :N+1
x=(i-1)*dx-Ar;
U(1,i)=max(0,exp(x)-K);
end

%condition au frontiere
U(:,1)=zeros(M+1,1);
for i=1 :M+1
tho=(i-1)*dt;
U(i,N+1)=(Smax-K*exp(-r*tho));
end

for l=2 :M+1
% construction du vecteur A0
A0=zeros(N-1,1);
A0(1)=gamma*U(1,1);
A0(N-1)=beta*U(1,N+1);

%*****fin*****

C=zeros(N-1,1);
for i=2 :N

%calcul de l'integrale

```

```

int=0;
for j=(E((binf/dx)+0.5)):(E((bsup/dx)-0.5)+1)
vj=(dx/2)*(lognormal((j-0.5)*dx,delta,mu)+lognormal((j+0.5)*dx,delta,mu));
if(1 <= i - 1 + j)et(i - 1 + j <= N + 1)
int=vj*U(l-1,i-1+j)+int;
else
int=0+int;
end
end
int=int*dt*lamda;
% *****fin integral*****
int=int+U(l-1,i);
C(i-1)=int;
end

U(l,2 :N)=(inv(A)*(C-A0))';
end

%changement de variables
S=zeros(1,N+1);t=zeros(1,M+1);
for i=1 :N+1
x=(i-1)*dx+A1;
S(i)=exp(x);
end
for j=1 :M+1;
t(j)=T-(j-1)*dt;
end
%*****fin*****

%*****
%solution exacte
%*****

lambda = lamda * (1 + k); CexM = 0;
for n = 0 : 300
csigma_n = (sigma)^2 + (n * (delta)^2)/T;
r_n = r - lamda * k + n * (log(1 + k))/T;
d1n = (log(S./K) + (r_n + 0.5 * csigma_n) * T)./(sqrt(csigma_n * T));
d2n = (log(S./K) + (r_n - 0.5 * csigma_n) * T)./(sqrt(csigma_n * T));
N1 = 0.5 * erfc(-d1n./sqrt(2));
N2 = 0.5 * erfc(-d2n./sqrt(2));
CBS = (S * N1) - (K * exp(-r_n * T) * N2);
V = (exp(-lambda * T) * ((lambda * T).^n) ./ factorial(n)) * CBS;
CexM = CexM + V;
end

```

lognormal

```
function f = lognormal(y, delta, mu)
f = (1/(delta * sqrt(2 * pi))) * exp((-1) * 0.5 * ((y - mu)^2)/((delta)^2));
```

partie entiere

```
function y = E(x)
if(round(x) - x) <= 0
y = round(x);
else
y = round(x) - 1;
end
```

Calcul de l'erreur

```
function [C ERR] = ERREUR_MER_flo(l)
i = 1; M = 300;
for N = 100 : 5 : l
[U CexM] = Merton_flo(N);
ERR(i) = erreur();
C(i) = N;
i = i + 1;
end
function S = erreur()
S1 = (CexM - U(M + 1, :)).^2; S2 = CexM.^2;
sum1 = 0; sum2 = 0;
for j = 1 : N + 1
sum1 = S1(j) + sum1;
sum2 = S2(j) + sum2;
end
sum1 = sum1/(N + 1); sum2 = sum2/(N + 1);
S = sqrt(sum1/sum2);

end
end
```

Bibliographie

- [1] CHARPENTIER A. (2006/2007), *Méthodes numériques en finance*, ESAE-ENSAI-CREST and Katholieke Universiteit Leuven - Belgium
- [2] CVTANIC J. and ZAPATERO F. (2004), *Introduction to the Economics and mathematics of financial markets*, Massachusetts Institute of Technology - U.S.A
- [3] BOUDREAULT M. (2014), *Modèles et méthodes en mathématiques financière*, Cours Master II - Université du Quebec à Montreal - Canada
- [4] MATSUDA K. (2004), *Introduction to the Merton Jump-diffusion models*, Department of Economics - The City University - New York-U.S.A
- [5] WOLFGANG J.R. (2002), *Jump-diffusion models*, Dipartimento di Mathematica pura ed Applicata - Università di Padova - Italy
- [6] KOU S.G. (2002), *A jump-diffusion Model for option pricing*, Department of industrial Engineering and opérations Research - Columbia University - New York - U.S.A
- [7] HERBIN R. (2011), *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Cours Master - Université Aix Marseille 1 - France
- [8] TANKOV P. and VOLTCHOVA E. (1992), *Jump-Diffusion model : A practitioner's guide*, Université Paris 7 et Université Toulouse - France
- [9] KARAOUI N. (2003), *Couverture des risques dans les marchés financiers*, Cours de Master II - Ecole Polytechnique-CMAP-France
- [10] DEBERSE M. (2006), *Sous-évaluation des prix des options dans le modèles de black et scholes*, SUNGARD CADEXTAN ARMONYS-France
- [11] CARR p. and MAYO A. (2007), *On the numerical evaluation of option prices in jump diffusion processes*, European Journal of Finance, 13, 353-372
- [12] CONT R. and TANKOV P. (2004), *Financial Modelling with jump processes*, CRC press LLC
- [13] CHAMPAGNAT N. (2010), *Difference finies et analyse numérique matricielle*, Cours Master II - IMAFA - France
- [14] GONCALVES E. (2005), *Methodes, Analyses et calculs numeriques*, Institut polytechnique - Grenoble - France
- [15] POKAM B. (2011), *Modelisation introduction aux équations aux dérivées partielles et leurs résolutions numériques*, Cours Master II - FN CRES
- [16] CROSBY J. (2013), *Introduction to jump and levy processes*, Course in Mathematical Finance at the Mathematical Institute - Oxford University - Angleterre

-
- [17] CONT R. and VOLTCHOVA E.(2005), *A finite difference scheme for option pricing in jump diffusion and exponential lévy models*, SIAM J. NUMER. ANAL. Vol. 43, No. 4, pp. 1596-1626
- [18] BURGER P. and KLIARAS M. (2013), *Jump diffusion models for option pricing and the black scholes model*, University of Applied Sciences bfi Vienna-Austria
- [19] JIANG L. (2005), *Mathematical modeling and methods*, Tongji university - China.
- [20] SCHIED J.F. (2011-2012), *Méthodes numériques pour la dynamique des fluides*, Cours Master II - Université de Lorraine-France
- [21] POTRAIT R. and PONCET P. (2012), *Finance de marché : instruments de base, produits dérivés, portefeuilles et risque*, DALLOZ, 3^e édition
- [22] VERRAUX A. (2008), *résolution de l'équation de Black et Scholes*, Thèse de Master II - Tampere University of Technology-Finlande
- [23] NYASSOKE T.G. (2014), *Performance d'un portefeuille de matières premières*, Mémoire de Master II - Laboratoire de Mathématiques- Université de Douala-Cameroun
- [24] NKOA L. (2013), *Evaluation d'une option Européenne dans un modèle de marché markovien*, Mémoire de Master II - Laboratoire de Mathématiques- Université de Douala-Cameroun
- [25] MOMEYA R.H. (2004/2005), *Problème de la calibration dans les modèles financiers : étude à partir d'un article de R cont et de P. tankov*, Mémoire de Master - Université de Yaoundé I-Cameroun
- [26] BOUDREAULT M. (2011), *Une introduction aux mathématiques de l'ingenerie financière*, Université de Quebec à Montreal-Canada
- [27] KOFFI R.S. (15 juin 2014), *A finite volume-exponential integrator for pricing European option under jump diffusion processes*, Mémoire de Master II - AIMS - Senegal
- [28] NOUPELAH A.J. (2015), *Résolution numérique de l'équation de Black et Scholes par une méthode pseudospectrale de type collocation Tchebychev*, Mémoire de Master II - Laboratoire de Mathématiques - Université de Douala-Cameroun